MERCOLEDÌ 8.40 – 10.30 F

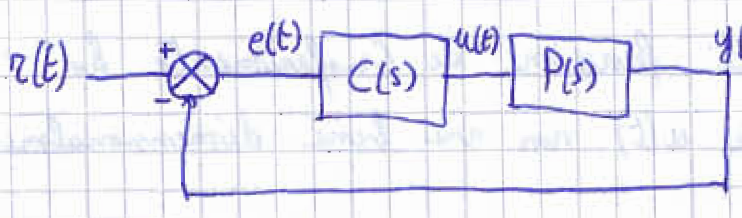
GIOVEDÌ 10.30 – 12.15 B/1

Due parti:

- parte A: teoria, fino a fine aprile. Compitino a inizio maggio
- parte B: esercizi, esame completo inizio giugno.

No libri di testo. Ma volendo:

- Bonivento, Melchiorri, Zanasi "SISTEMI DI CONTROLLO DIGITALE"
- Corradini, Orlando "CONTROLLO DIGITALE DI SISTEMI DINAMICI"

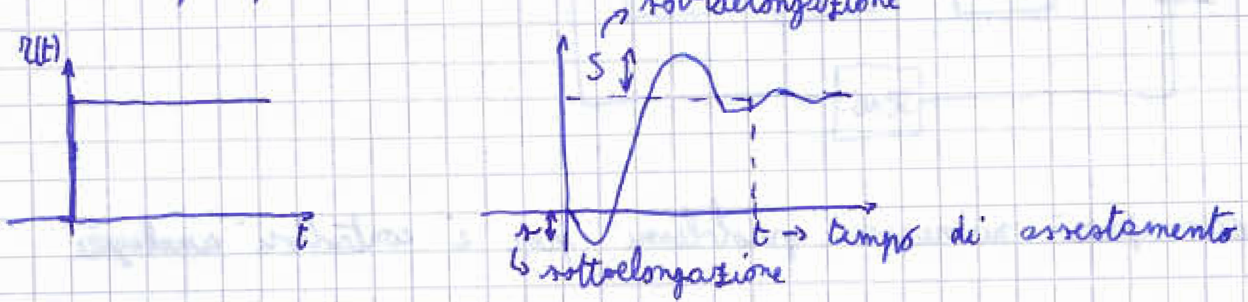


P → impianto

C → controllore

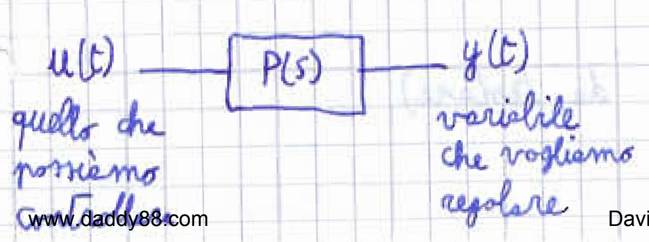
$e(t) = r(t) - y(t)$ segnale di errore

Lo scopo è avere $y(t)$ simile a $r(t)$ e che $e(t)$ sia reso piccolo in un tempo piccolo.

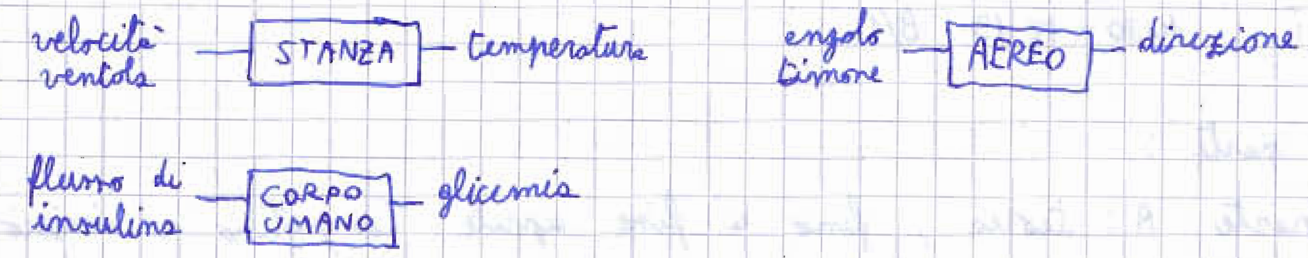


Tutti i sistemi che tratteremo dovranno essere STABILI e ROBUSTI

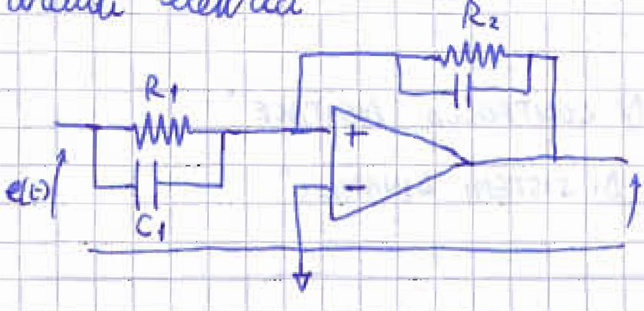
Vediamo ora come sono fatti i controllori.



Ad esempio:



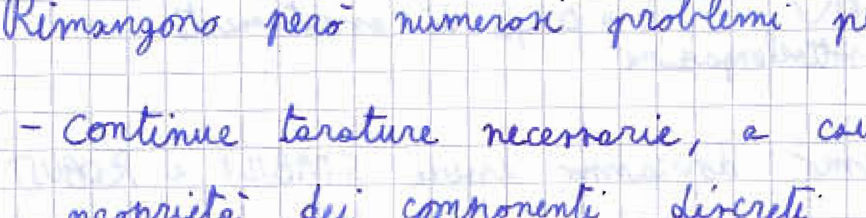
I controllori, come visto in controlli automatici, vengono fatti con circuiti elettrici



$$C(s) = \frac{1+\tau s}{1+\alpha \tau s}$$ RETE ANTICIPATRICE

Il problema è che per semplici funzioni di trasferimento ho circuiti complessi. Inoltre, l'uscita $u(t)$ non va bene dimensionalmente per l'impianto. Introduco:

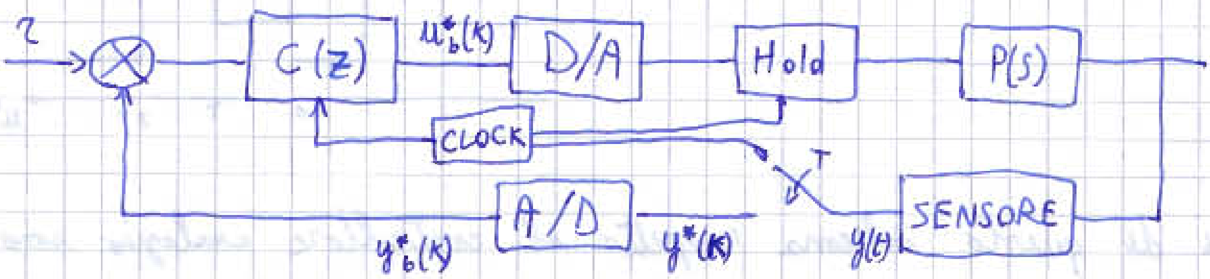
- ATTUATORE → trasforma un segnale elettrico in un segnale fisico
- SENSORE → trasforma un segnale fisico in uno elettrico



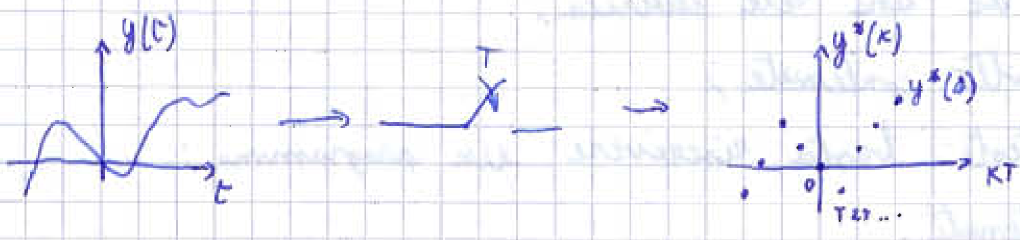
Rimangono però numerosi problemi per i controllori analogici:

- Continue tarature necessarie, a causa del cambiamento delle proprietà dei componenti discreti
- guasti più probabili, a causa dell'aumento del numero di componenti
- difficoltà di test (tanti componenti da testare)
- costi elevati

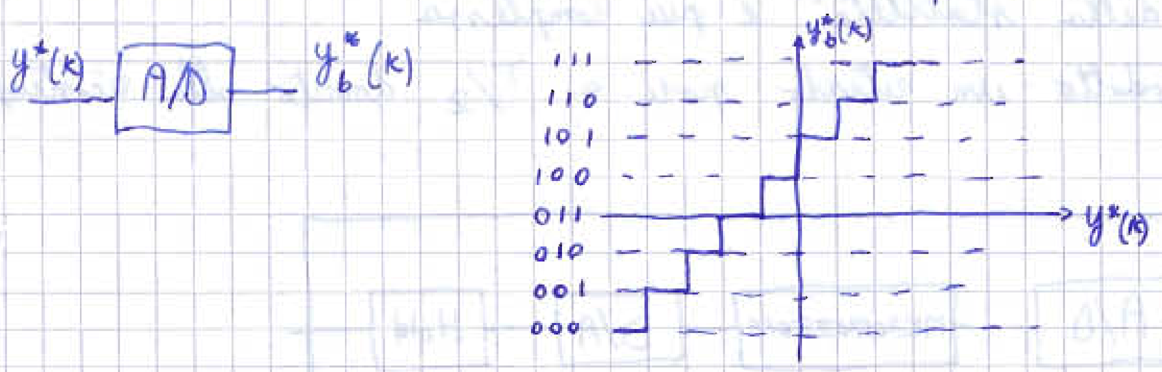
Per questo motivo, dagli anni '70 vengono utilizzati sistemi di controllo digitale, che usano in pratica un microprocessore come controllore invece di una rete elettrica:



CAMPIONATORE → converte un segnale a tempo continuo in un segnale a tempo discreto (T = tempo di campionamento)

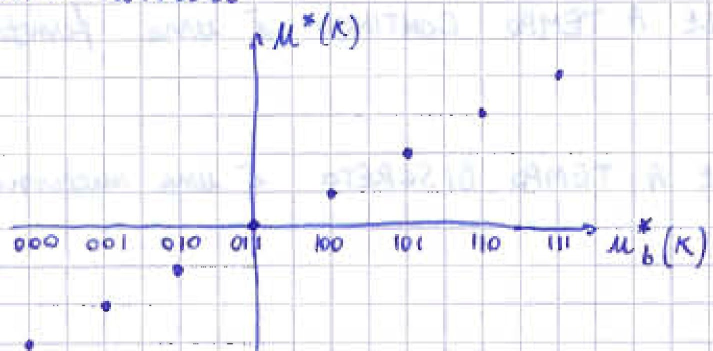


L'uscita del campionatore avrà tempo discreto, ma valori continui.
Il CONVERTITORE ANALOGICO/DIGITALE converte questi valori in binario.

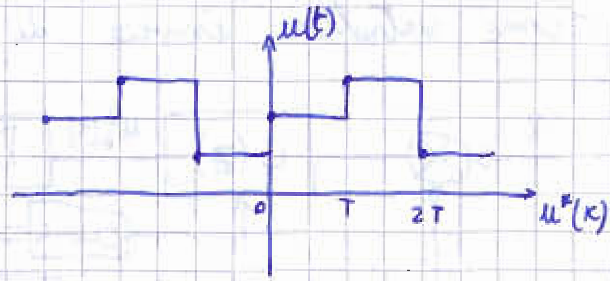


$y_b^*(k)$ sarà quindi una sequenza di bit.

Il CONVERTITORE DIGITALE/ANALOGICO converte il segnale digitale in un segnale a tempo e valori discreti

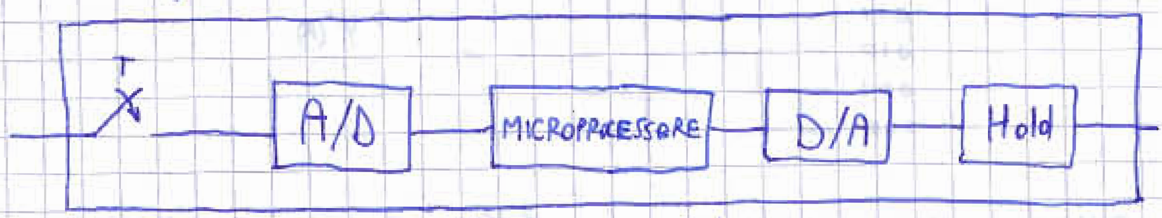


Infine, il FILTRO DI HOLD trasforma il segnale discreto in segnale a tempo continuo, e lo fa mantenendo costante il valore del campione fino all'arrivo del nuovo campione.



I vantaggi di questo schema rispetto al controllore analogico sono:
- non necessita di tarature: i sistemi digitali sono più robusti;
- posso realizzare controllori complessi di tipo non lineare, non rappresentabili da una rete elettrica;
- dimensioni molto contenute;
- facilità di test: basta riscrivere un programma;
- costi più contenuti.

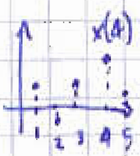
Tuttavia, ci sono alcuni svantaggi:
- l'analisi della stabilità è più complessa
- viene introdotto un ritardo pari a $T/2$ dovuto alla ricostruzione del segnale



DSP Digital Signal Processor

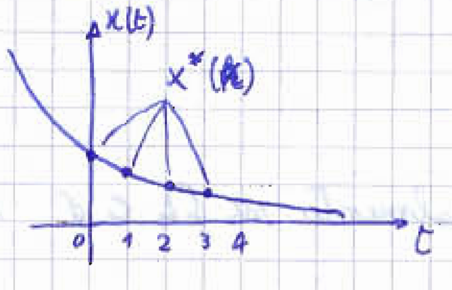
Un SEGNALE A TEMPO CONTINUO è una funzione $x: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$
$t \to x(t)$

Un SEGNALE A TEMPO DISCRETO è una successione $x: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$
$k \to x(k)$



Il CAMPIONAMENTO è un'operazione che associa ad un segnale a tempo continuo x un segnale a tempo discreto x^* mediante la regola $x^*(k) = x(kT)$, $k \in \mathbb{Z}$ dove $T>0$ si chiama TEMPO DI CAMPIONAMENTO.

Ad esempio $x(t) = e^{-t}$



$$x^*(k) = x(kT) = e^{-kT}$$

Ricordo che la trasformata di Laplace $\mathcal{L}\{x\}(s) = \int_0^{+\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$

TRASFORMATA ZETA

La trasformata Zeta è un operatore che associa ad un segnale a tempo discreto x una funzione di variabile complessa $\mathcal{Z}\{x\}: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ secondo la relazione

$$\mathcal{Z}\{x\}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)\, z^{-k} \quad \text{con } z \text{ variabile complessa}$$

È una trasformata monolatera perché dipende solo dalla parte positiva del segnale.

Indichiamo $\mathcal{Z}\{x\}(z)$ con $X(z)$.

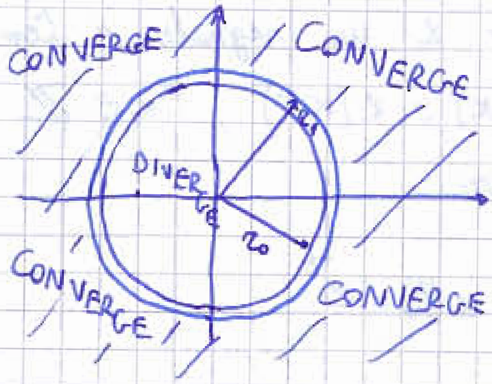
Proposizione (regione di convergenza della trasformata Zeta)

La trasformata zeta di un segnale a tempo discreto x

1) converge uniformemente sull'insieme $\{z : |z| \geq r_1 > r_0\}$
dove r_0 = limite superiore per $k \to \infty$ di $|x(k)|^{1/k}$

2) diverge nell'insieme $\{z : |z| < z_0\}$

Essendo $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$



Definizione

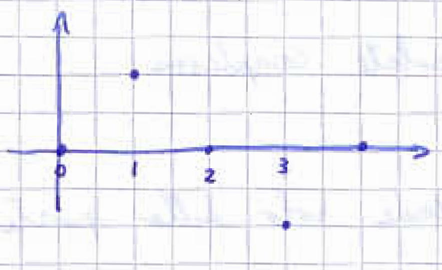
Una serie di funzioni $f_i(z)$ converge puntualmente su $\Omega \subset \mathbb{C}$ se $\forall \varepsilon > 0 \ \forall z \in \Omega, \exists \bar{K} \in \mathbb{Z} \quad \left|\sum_{K=\bar{K}}^{+\infty} f_i(z)\right| < \varepsilon$

Una serie di funzioni $f_i(z)$ converge uniformemente su $\Omega \subset \mathbb{C}$ se $\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{K} \in \mathbb{Z}$ tale che $\left|\sum_{K=\bar{K}}^{+\infty} f_i(z)\right| < \varepsilon \quad \forall z \in \Omega$

Definizione

Data una successione $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $\limsup_{K \to +\infty} x(K) = \lim_{K \to \infty} \sup_{i \geq K} \{x(i)\}$

Esempio: $x(K) = \sin\left(\frac{\pi}{2} K\right)$



$\nexists \lim_{K \to \infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} K\right)$

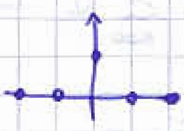
$\limsup_{K \to \infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} K\right) = ?$

$\limsup_{K \to \infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} K\right) = \lim_{K \to \infty} \left[\sup_{i \geq K} \left\{\sin\left(\frac{\pi}{2} i\right)\right\}\right] = \lim_{K \to \infty} 1 = 1$ esiste sempre

04/03/2010

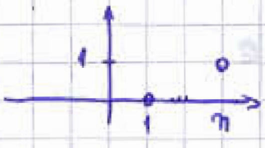
DELTA DISCRETA

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0 \end{cases} \qquad Z(\delta(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(x) z^{-k} = \delta(0) z^{-0} = 1$$



DELTA TRASLATA

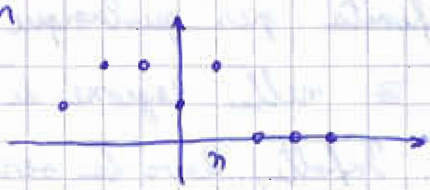
$\delta(k-n)$



$$Z\{\delta(k-n)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(k-n) z^{-k} = \underbrace{\delta(n-n)}_{1} z^{-n} = z^{-n}$$

Definizione

Un segnale a TEMPO DISCRETO x è di LUNGHEZZA FINITA pari ad n se $x(k) = 0 \quad \forall k > n$



Se x è di lunghezza finita n, $Z\{x\}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k) \cdot z^{-k} =$

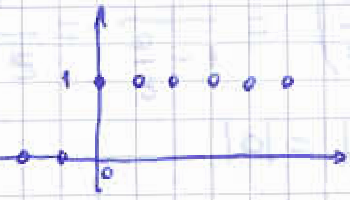
$$= \sum_{k=0}^{n} x(k) \cdot z^{-k} = x(0) + x(1) z^{-1} + \ldots + x(n) z^{-n} = \frac{x(0) z^{n} + x(1) z^{n-1} + \ldots + x(n)}{z^{n}}$$

Esempio

$$x(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0 \\ 3 & \text{se } k = 1 \\ 2 & \text{se } k = 2 \\ 0 & \text{se } k > 2 \end{cases} \Rightarrow X(z) = 1 + 3z^{-1} + 2z^{-2} = \frac{z^2 + 3z + 2}{z^2}$$

GRADINO UNITARIO

$$1(k) = \begin{cases} 0 & \text{se } k < 0 \\ 1 & \text{se } k \geq 0 \end{cases}$$



È segnale di lunghezza infinita

$$Z\{1\}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} 1(k) \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k}$$

dove converge? Calcolo il raggio del cerch

$$r = \limsup_{k \to +\infty} [x(k)]^{1/k} = \limsup_{k \to +\infty} 1 = 1$$

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k = \frac{1}{1-a} \quad \text{se } |a|<1$$ Dimostro

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} a^k = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} a^k = 1 + a \sum_{k=1}^{+\infty} a^{\overset{l}{(k-1)}} = 1 + a \sum_{l=0}^{+\infty} a^l}_{=}$$

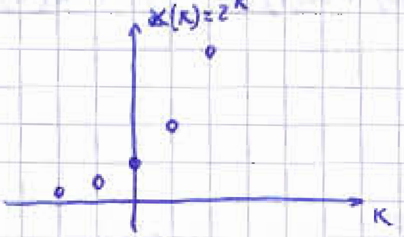
$$\sum_{k=0}^{+\infty} a^k (1-a) = 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$$

$$\mathcal{Z}\{1(k)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1}$$

Questa funzione, pur essendo definita per qualunque valore di z, mi rappresenta la trasformata z nella regione di convergenza della serie (parte esterna del cerchio). Infatti, dove la serie non converge, non ha senso calcolare la trasformata z.

PROGRESSIONE GEOMETRICA DI RAGIONE a

$X(k) = a^k$ con $a \in \mathbb{C}$

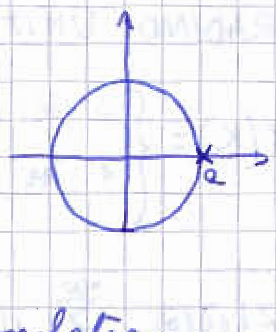


Corrisponde all'esponenziale a tempo continuo.

Calcolo la trasformata:

$$\mathcal{Z}\{a^k\}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{a}{z}} = \frac{z}{z-a}$$

$$r = \limsup_{k \to +\infty} |a^k|^{1/k} = \limsup_{k \to +\infty} |a| = |a|.$$



Osservazione: $\mathcal{Z}\{1\} = \mathcal{Z}\{1(k)\} = \frac{z}{z-1}$ perché z è monolatera

La funzione $1(k)$ è utile per eliminare la parte negativa di una funzione

$$a^k \cdot 1(k) = \begin{cases} 0 & \text{se } k<0 \\ a^k & \text{se } k \geq 0 \end{cases} \qquad Z\{a^k \cdot 1(k)\} = Z\{a^k\} = \frac{z}{z-a}$$

$$\boxed{Z\{x(k)\cdot 1(k)\} = Z\{x(k)\}}$$

La trasformata z non mi dice niente sulla parte negativa del segnale.

$$Z^{-1}\left\{\frac{z}{z-1}\right\} \begin{array}{l} \nearrow 1(k) \\ \searrow 1 \end{array}$$ → corretti entrambi i risultati.

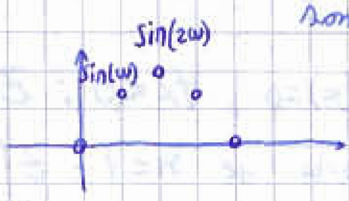
PROPRIETÀ DELLA TRASFORMATA ZETA

① LINEARITÀ: dati due segnali a tempo discreto x e y e dati $a, b \in \mathbb{C}$, $Z\{ax+by\} = a\,Z\{x\} + b\,Z\{y\}$.

Dimostrazione: $$Z\{ax+by\} = \sum_{k=0}^{+\infty} [a x(k) + b y(k)]\, z^{-k} = a \sum_{k=0}^{+\infty} x(k) z^{-k} + b \sum_{k=0}^{+\infty} y(k) z^{-k} =$$

$$= a\,Z\{x\} + b\,Z\{y\}$$ ■ Ho sfruttato la linearità della sommatoria.

Esempio: $x(k) = \sin(wk)$



w = tempo di campionamento

$$\sin(wk) \overset{\text{formula Eulero}}{=} \frac{e^{jwk} - e^{-jwk}}{2j} = \frac{1}{2j}\left[(e^{jw})^k - (e^{-jw})^k\right]$$

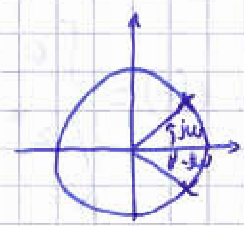
$$Z\{\sin(wk)\} = \frac{1}{2j}\, Z\left\{(e^{jw})^k - (e^{-jw})^k\right\} = \frac{1}{2j}\left[\frac{z}{z-e^{jw}} - \frac{z}{z-e^{-jw}}\right] =$$

$$= \frac{1}{2j}\left[\frac{z\cdot(\cancel{z} - e^{-jw} - \cancel{z} + e^{jw})}{(z-e^{jw})(z-e^{-jw})}\right] = \frac{z \cdot \sin w}{(z-e^{jw})(z-e^{-jw})} =$$

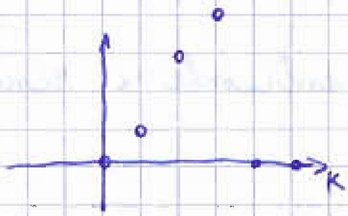
$$= \frac{z\cdot \sin w}{z^2 - z(e^{jw} + e^{-jw}) + 1} = \frac{z \cdot \sin w}{z^2 - 2\cos w \cdot z + 1}$$

$$\mathcal{Z}\{\cos(\omega k)\} = \frac{z^2 - z\cos\omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}$$

} poli sono $e^{\pm j\omega}$ e sono sul cerchio unitario.



$$X(z) = \frac{z^2+3z+4}{z^3} = z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3} = \delta(k-1) + 3\delta(k-2) + 4\delta(k-3)$$



Riesco ad antitrasformare un segnale come somma di δ traslate.

② SEGNALE TRASLATO IN AVANTI: dato un segnale a tempo discreto x,

$$\mathcal{Z}\{x(k-n)\}(z) = z^{-n}\mathcal{Z}\{x(k)\} + \sum_{k=0}^{n-1} x(k-n)\, z^{-k}.$$

Dimostrazione: $$\mathcal{Z}\{x(k-n)\}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k-n)\, z^{-k} \overset{(*)}{=} \sum_{k=0}^{n-1} x(k-n)\, z^{-k} + \sum_{k=n}^{+\infty} x(\underbrace{k-n}_{l})\, z^{-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} x(k-n)\, z^{-k} + \sum_{l=0}^{+\infty} x(l)\, z^{-l} \cdot z^{-n} = \sum_{k=0}^{n-1} x(k-n) z^{-k} + z^{-n}\mathcal{Z}\{x(k)\}$$

Osservazioni: se $x(k)=0$, $\forall x<0$: $\mathcal{Z}\{x(k-n)\} = z^{-n}\cdot\mathcal{Z}\{x(k)\}$ e in particolare se $n=1$: $\mathcal{Z}\{x(k-1)\} = z^{-1}\mathcal{Z}\{x(k)\}$

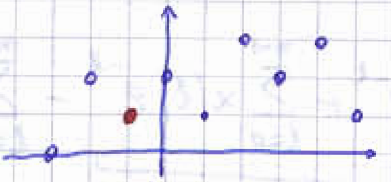
A differenza della trasformata di Laplace, nella trasformata z è molto semplice anticipare o ritardare un segnale: basta moltiplicare la sua trasformata per z o z^{-1}.

$$\mathcal{Z}\{x(k-n)\cdot 1(k-n)\} = z^{-n}\cdot\mathcal{Z}\{x(k)\cdot 1(k)\} = z^{-n}\mathcal{Z}\{x(k)\}$$

In realtà, moltiplicare per z^{-n} vuol dire prendere un segnale, togliere la parte negativa e traslare quello che rimane in avanti di n passi.

$$\mathcal{Z}\{x(k-1)\} = z^{-1}\mathcal{Z}\{x(k)\} + x(-1)$$

(*) Se il grafico del segnale fosse



, dato che la trasformata non tiene conto del valore negativo del segnale, la traslazione in avanti di uno ($n=1$) comporta che debba tenere conto del contributo di questo valore.

Esempio: $x(k)=2^k$, calcolare $\mathcal{Z}\{x(k-2)\}$.

$$\mathcal{Z}\{x(k-2)\} = z^{-2}\cdot \mathcal{Z}\{x(k)\} + x(-2) + x(-1)\, z^{-1} = z^{\cancel{-2}\,-1}\cdot \frac{\cancel{z}}{z-2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\, z^{-1} =$$

$$= \frac{4 + z(z-2) + 2(z-2)}{4z(z-2)} = \frac{z^2}{4z(z-2)} = \frac{z}{4(z-2)} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{z}{z-2} \quad \text{infatti} \quad x(k-2) = 2^{k-2} = 2^{-2}\cdot 2^k = \frac{1}{4}\, 2^k.$$

Guardiamo cosa succede se considerassi un segnale con parte negativa nulla $x(k) = 2^k \cdot 1(k)$.

$$\mathcal{Z}\{x(k-2)\} = z^{-2}\cdot \mathcal{Z}\{2^k\} = z^{-2}\,\frac{z}{z-2}.$$

11/03/2010

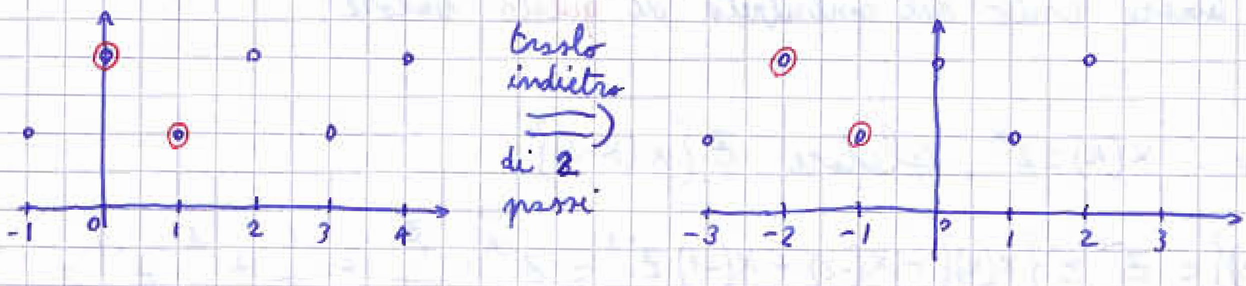
$$\mathcal{Z}\{x(k-n)\} = z^{-n}\cdot \mathcal{Z}\{x(k)\} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} x(\overbrace{k-n}^{<0})\, z^{-k}}_{0 \text{ per segnali nulli per } k<0}$$

(3) TRASFORMATA DI UN SEGNALE TRASLATO ALL'INDIETRO: se x è un segnale a tempo discreto e $n \in \mathbb{N}$ allora

$$\mathcal{Z}\{x(n+k)\} = z^n\left[\mathcal{Z}\{x(k)\} - \sum_{k=0}^{n-1} x(k)\, z^{-k}\right]$$

DIM. $$\mathcal{Z}\{x(k+n)\} \overset{\text{def.}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} x(k+n)\, z^{-k} \underset{\substack{l=k+n \\ k=l-n}}{=} \sum_{l=n}^{+\infty} x(l)\, z^{-(l-n)} = z^n \sum_{l=n}^{+\infty} x(l)\, z^{-l} =$$

$$= z^n \cdot \Bigg[\underbrace{\sum_{l=n}^{+\infty} x(l) z^{-l} + \sum_{l=0}^{n-1} x(l) z^{-l}}_{\text{è la trasformata } Z} - \sum_{l=0}^{n-1} x(l) z^{-l} \Bigg] = z^n \Bigg[Z\{x(k)\} - \sum_{l=0}^{n-1} x(l) z^{-l} \Bigg]$$



Questi termini diventano negativi, per cui li tolgo dalla trasformata perchè li perdo, non mi interessano più.

Scrivo la formula per i casi più comuni:

$\boxed{n=1}$

$$Z\{x(k+1)\} = z \left[Z\{x(k)\} - x(0) \right]$$

$\boxed{n=2}$

$$z^{-0} = 1$$

$$Z\{x(k+2)\} = z^2 \left[Z\{x(k)\} - x(0) - x(1) z^{-1} \right]$$

Esempio : $x(k) = 1(k)$. Ci aspettiamo che, traslando indietro di 1, venga fuori la trasformata del gradino invariata perchè la parte positiva, ovvero quella che interessa la trasformata, è la stessa!

$$Z\{1(k+1)\} = z \left[\frac{z}{z-1} - 1 \right] = z \left[\frac{z-z+1}{z-1} \right] = z \cdot \frac{1}{z-1} = \frac{z}{z-1}$$

Mentre invece la traslazione in avanti è ovviamente diversa.

$$Z\{1(k-1)\} = \cancel{z}^{-1} \cdot \frac{\cancel{z}}{z-1} = \frac{1}{z-1}$$

(4) TRASFORMATA DEL SEGNALE $x(k)\cdot a^k$: se x è un segnale a tempo discreto e $a \in \mathbb{C}$ e se $X(z)$ rappresenta la trasformata $Z\{x(k)\}$, allora:

$$Z\{a^k x(k)\} = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

DIM.

$$Z\{a^k x(k)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k x(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)\left(\frac{z}{a}\right)^{-k} = X\left(\frac{z}{a}\right) \blacksquare$$

Esempio

$$Z\{a^k\} = Z\{a^k \cdot 1\} = \underbrace{\frac{z}{z-1}}_{X(1)}\Bigg|_{z\to\frac{z}{a}} = \frac{\frac{z}{a}}{\frac{z}{a}-1} = \frac{z}{z-a}$$

$$Z\{a^k \cdot \sin(\omega k)\} = \frac{z\cdot\sin\omega}{z^2 - 2\cos\omega z + 1}\Bigg|_{z\to\frac{z}{a}} = \frac{\frac{z}{a}\sin\omega}{\frac{z^2}{a^2} - 2\frac{z}{a}\cos\omega + 1} \cdot a^2 =$$

$$= \frac{z a \sin\omega}{z^2 - 2az\cos\omega + a^2}.$$

(5) TEOREMA DEL VALORE INIZIALE: se x è un segnale a tempo discreto, $x(0) = \lim_{z\to+\infty} Z\{x(k)\}$

DIM.

$$\lim_{z\to\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} x(k) z^{-k} \underset{\substack{\text{scambio}\\ \lim \text{ e } \Sigma\\ \text{perché } \Sigma\\ \text{converge}}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{z\to\infty} x(k) z^{-k} = \text{guardo quanto valgono questi limiti}$$

se $k=0$, $\lim_{z\to\infty} x(0) z^{-0} = x(0)$

se $k>0$, $\left|\lim_{z\to\infty} x(k) z^{-k}\right| = |x(k)| \lim_{z\to\infty} \frac{1}{|z|^k} = 0$.

La sommatoria si riduce al primo termine $x(0)$ $\blacksquare$

Esempio

$$X(z) = \frac{z^2 - z}{z^2+3z-4}$$, quanto vale $x(0)$? $\quad x(0) = \lim_{z\to\infty} \frac{z^2-z}{z^2+3z-4} = 1$.

Quanto vale $x(1)$? Traslo di un passo all'indietro e poi ricalcolo $x(0)$.

$$\mathcal{Z}\{x(k+1)\} = z\left[\frac{z^2-z}{z^2+3z-4} - x(0)\right] = z\left[\frac{\cancel{z^2}-z-\cancel{z^2}-3z+4}{z^2+3z-4}\right] = \frac{-4z^2+4z}{z^2+3z-4}$$

$$x(1) = \lim_{z\to\infty} \mathcal{Z}\{x(k+1)\} = \lim_{z\to\infty} \frac{-4z^2+4z}{z^2+3z-4} = -4.$$

Def. CONVOLUZIONE DI SEGNALI A TEMPO DISCRETO

Dati due segnali a tempo discreto x e y, la loro convoluzione è un segnale a tempo discreto definito da

$$(x \circledast y)(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(k-i)\,y(i)$$

Il termine della somma $x(k-i)y(i)$ è una copia di $x(k)$ traslata in avanti di i-passi e moltiplicata per $y(i)$.

La convoluzione è quindi la replica infinite volte del segnale x traslato e moltiplicato per un "peso" $y(i)$.

Esempio

$$x(k) = 2^k \cdot 1(k) \qquad (x \circledast y)(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(k-i)y(i) = x(k-0)\cdot y(0) + x(k-1)\cdot y(1) =$$

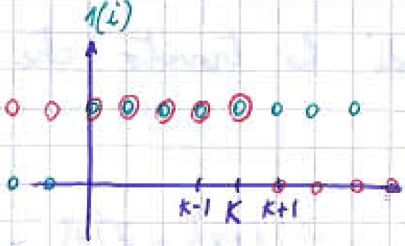
$$y(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } k=0 \\ -2 & \text{se } k=1 \\ 0 & \text{se } k>1 \text{ o } k<0 \end{cases} \qquad = 2^k \cdot 1(k)\cdot 1 + 2^{k-1}\cdot 1(k-1)\cdot(-2).$$

Esempio

$x(k) = 1(k)$

$y(k) = 1(k)$

$$(x \circledast y)(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} 1(k-i)\, 1(i) = \begin{cases} 0 & \text{se } k<0 \\ k+1 & \text{se } k \geq 0 \end{cases}$$



Il segnale $1(k-i)1(i) = 1$ se e solo se $0 \leq i \leq k$ (per $k>0$)

Se $k<0$, il segnale è sempre nullo.

La convoluzione è un OPERATORE COMMUTATIVO. Infatti:

$$(y \circledast x)(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} y(k-i)\, x(i) \underset{l=k-i}{=} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} y(l)\, x(k-l) = (x \circledast y)(k).$$

(6) TRASFORMATA Z DELLA CONVOLUZIONE: dati due segnali a tempo discreto x e y con $x(k)=0$ e $y(k)=0$ $\forall k<0$, allora

$$Z\{x \circledast y\} = Z\{x\} \cdot Z\{y\}$$

DIM.

$$Z\{x \circledast y\} = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(k-i)\cdot y(i)\right) z^{-k} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} x(\underbrace{k-i}_{\substack{k=l+i \\ l=k-i}})\, y(i)\, z^{-k} =$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} y(i) \sum_{l=-i}^{+\infty} x(l)\, z^{-l-i} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} y(i) \sum_{l=-i}^{+\infty} x(l)\, z^{-l} \cdot z^{-i} =$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} y(i)\, z^{-i} \sum_{l=-i}^{+\infty} x(l)\, z^{-l} = \sum_{i=0}^{+\infty} y(i)\, z^{-i} \sum_{l=0}^{+\infty} x(l)\, z^{-l} = Z\{y\}\cdot Z\{x\}$$

Visto che $x(k)=0$ e $y(k)=0$ $\forall k<0$, i termini con indici l ed i negativi nelle due sommatorie sono nulli.

Esempio

$$1(k) \circledast 1(k) = \begin{cases} 0 & \text{se } k<0 \\ 1+k & \text{se } k\geq 0 \end{cases} = (1+k)\, 1(k)$$

$$Z\{(1+k)\, 1(k)\} = Z\{1(k) * 1(k)\} = \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{z^2}{(z-1)^2}$$

Quindi ho trovato che $\mathcal{Z}\{(1+k)\,1(k)\} = \mathcal{Z}\{1+k\} = \dfrac{z^2}{(z-1)^2}$

$$\mathcal{Z}\{k\} = \mathcal{Z}\{1+k\} - \mathcal{Z}\{1\} = \frac{z^2}{(z-1)^2} - \frac{z}{(z-1)} = \frac{z^2 - z(z-1)}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

Quindi questa è la trasformata Z della rampa.

RICHIAMI A FUNZIONI ANALITICHE o OLOMORFE

$F : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$F(z) = \frac{z^2 + z \ldots}{(z-p_1)(z-p_2)\ldots(z-p_n)}$$

Def. Una funzione $F : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, Ω aperto è DERIVABILE in senso complesso in $z_0 \in \Omega$ se esiste il limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(z_0 + h) - F(z_0)}{h} \triangleq F'(z_0)$$

È un limite a due dimensioni!

Def. La funzione $F : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è OLOMORFA in $z_0 \in \Omega$ se è derivabile in senso complesso in un intorno di z_0.

Sono olomorfe le funzioni:

$F(z) = 1$, $F'(z) = 0$

$F(z) = z$, $F'(z) = 1$

$F(z) = z^k$, $F'(z) = k z^{k-1}$

$F(z) = e^{az}$, $F'(z) = a e^{az}$

Possiamo trattarle come funzioni di variabile reale, però dal punto di vista formale sono diverse.

Se F e G sono funzioni olomorfe su $\mathbb{C}$, $F+G$ e $F \cdot G$ sono olomorfe su $\mathbb{C}$, mentre F/G è olomorfa su $\{z \in \mathbb{C} \mid G(z) \neq 0\}$

Le funzioni del tipo

$$F(z) = \frac{b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m}{(z-p_1)(z-p_2)\dots(z-p_n)}$$

sono olomorfe su $\mathbb{C} \setminus \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$

17/03/2010

PROPRIETÀ OLOMORFIA DELLE TRASFORMATE ZETA

Dato un segnale a tempo discreto x con trasformata zeta $X(z) = \mathcal{Z}\{x\}$ con raggio di convergenza r, $X(z)$ è olomorfa sull'insieme $\{z \mid |z| > r\}$ e inoltre $-z \frac{d}{dz} X(z) = \mathcal{Z}\{k x(k)\}$

DIM.

Consideriamo il segnale $k x(k)$ e calcoliamo il raggio di convergenza

$$\rho = \limsup_{k \to \infty} |k x(k)|^{1/k} = \limsup_{k \to \infty} |k|^{1/k} |x(k)|^{1/k} = \limsup_{k \to \infty} |x(k)|^{1/k} \cdot e^{\underbrace{\frac{\ln|k|}{k}}_{\to 0}} =$$

$$= \limsup_{k \to \infty} |x(k)|^{1/k} = r$$

$$\frac{d}{dz} \mathcal{Z}\{k\} = \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{+\infty} x(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d}{dz} x(k) z^{-k} = \sum_{k=1}^{+\infty} x(k)(-k) z^{-k-1} =$$

per $k=0$, $z^0 = \text{cost}$, quindi derivata nulla

$$= -z^{-1} \sum_{k=1}^{+\infty} k x(k) z^{-k} = -z^{-1} \sum_{k=0}^{+\infty} k x(k) z^{-k} = -z^{-1} \mathcal{Z}\{k x(k)\} \quad \blacksquare$$

Esempio

$$\mathcal{Z}\{k\} = \mathcal{Z}\{k \cdot 1\} = -z \frac{d}{dz} \mathcal{Z}\{1\} = -z \frac{d}{dz} \frac{z}{z-1} = -z \cdot \frac{z-1-z}{(z-1)^2} =$$

$$= \frac{z}{(z-1)^2}$$ già calcolata con la convoluzione

$$Z\{k^2\} = Z\{k \cdot k\} = -z \frac{d}{dz} Z\{k\} = -z \frac{d}{dz} \frac{z}{(z-1)^2} =$$

$$= -z \cdot \frac{(z-1)^{\cancel{2}} - 2z\cancel{(z-1)}}{(z-1)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{-z^2+z+2z^2}{(z-1)^3} = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$ polo in 1 di ordine 3

Le funzioni olomorfe hanno due proprietà importanti:

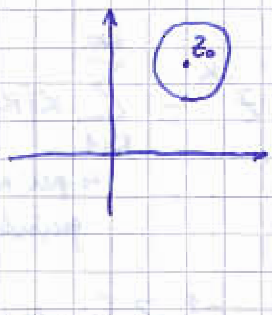
✓ sono funzioni analitiche, ovvero sono sviluppabili come serie di potenze

✓ i residui.

PROPRIETÀ: se $F: \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è una FUNZIONE OLOMORFA su Ω,
$\forall z_0 \in \Omega \;\; \exists \, \varepsilon > 0$ tale che

$$F(z) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i (z-z_0)^i, \;\; \forall z \in B(z_0, \varepsilon)$$

dove $a_i = \frac{1}{i!} \frac{d^i}{dz^i} F(z) \Big|_{z=z_0}$



Nell'intorno di z_0 la funzione si può rappresentare come somma di esponenziali dipendenti solo da z_0 e dalle derivate della funzione.

Funzioni di questo tipo si dicono ANALITICHE.

Verifico ora la formula $a_i = \frac{1}{i!} \frac{d^i}{dz^i} F(z) \Big|_{z=z_0}$.

Assumiamo che $F(z) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i (z-z_0)^i$

Calcolo

$$\frac{d^i}{dz^i} F(z)\Big|_{z=z_0} = \frac{d^i}{dz^i} \sum_{l=0}^{+\infty} a_l (z-z_0)^l = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{d^i}{dz^i} a_l (z-z_0)^l =$$

Calcolo le derivate per i valori di i:

$$\frac{d}{dz}(z-z_0) = 1$$

$$\frac{d}{dz}(z-z_0)^2 = 2(z-z_0)$$

$$\frac{d}{dz}(z-z_0)^l = l(z-z_0)^{l-1}$$

$$\frac{d^2}{dz^2}(z-z_0)^l = l(l-1)(z-z_0)^{l-2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^i}{dz^i}(z-z_0)^l = l(l-1)\dots(l-i+1)(z-z_0)^{l-i}$$

Sostituisco nell'espressione precedente:

$$\frac{d}{dz} F(z)\Big|_{z=z_0} = \sum_{l=0}^{+\infty} a_l \cdot l(l-1)\dots(l-i+1)(z-z_0)^{l-i}\Big|_{z=z_0} =$$

Tutti i termini per $l = 0\dots(i-1)$ si annullano perchè c'è un termine che annulla il prodotto.

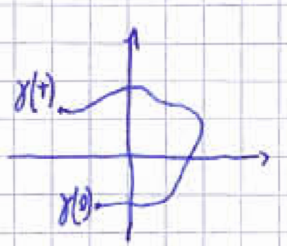
$$= \sum_{l=i}^{+\infty} l(l-1)\dots(l-i+1)(z-z_0)^{l-i}\Big|_{z=z_0}$$

Ma anche i termini per $l = i+1\dots+\infty$ si annullano perchè $(z-z_0)|_{z=}$ annulla il prodotto. Rimane solo il termine $l=i$.

$$\frac{d^i}{dz^i} F(z)\Big|_{z=z_0} = a_i\, i(i-1)\cdot\dots\cdot 1 = a_i \cdot i!$$

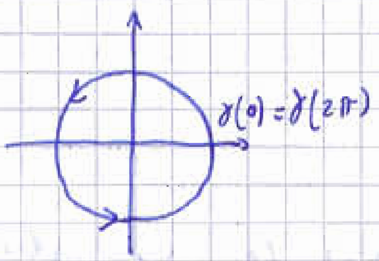
Def.

Un CAMMINO è una funzione $\gamma : [0, T] \to \mathbb{C}$ di classe C^1.



Il cammino è chiuso se $\gamma(0) = \gamma(T)$

L'unico cammino che ci interesserà è $\gamma(\vartheta) = e^{j\vartheta}$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$ che rappresenta un cerchio di raggio 1 $(= \cos\vartheta + j\sin\vartheta)$



In generale: $\gamma(\vartheta) = z_0 + \rho e^{j\vartheta}$ è un cerchio centrato in z_0 di raggio ρ.

Def. INTEGRALE DI UNA FUNZIONE COMPLESSA LUNGO UN CAMMINO

Data $F : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e un cammino $\gamma : [0, T] \to \Omega$

$$\int_\gamma F(z)\, dz = \int_0^T F(\gamma(\vartheta))\, \gamma'(\vartheta)\, d\vartheta .$$

$z = \gamma(\vartheta)$

$dz = \gamma'(\vartheta) d\vartheta$

Ci interesserà calcolare questo integrale per una particolare famiglia di funzioni:

$F(z) \to$ funzione da integrare

$\gamma(\vartheta) = e^{j\vartheta}$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$ con $F(z) = \dfrac{1}{z}$

$\gamma(\vartheta) \to$ cammino

$\gamma'(\vartheta) = j e^{j\vartheta}$

$$\oint_\gamma F(z)\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cancel{e^{j\lambda}}}\, j\,\cancel{e^{j\lambda}}\, d\lambda = 2\pi j$$

In generale, con $\gamma(\lambda) = z_0 + \rho e^{j\lambda}$, $\lambda \in [0, 2\pi]$ e $\gamma'(\lambda) = j\rho e^{j\lambda}$

Considero $F(z) = (z - z_0)^n$

$$\oint_\gamma F(z)\,dz = \int_0^{2\pi} \left(z_0 + \rho e^{j\lambda} - z_0\right)^n j\rho e^{j\lambda}\, d\lambda = \int_0^{2\pi} j\rho^{n+1} e^{j\lambda(n+1)}\, d\lambda =$$

$$= j\rho^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{j\lambda(n+1)}\, d\lambda$$

se $n = -1$, stesso conto di prima, $\oint_\gamma F(z)\,dz = 2\pi j$

se $n \neq -1$, $\oint_\gamma F(z)\,dz = j\rho^{n+1} \left. \frac{e^{j\lambda(n+1)}}{j(n+1)} \right|_0^{2\pi} =$

$\to \underbrace{\cos(2\pi(n+1)) + \rho \sin(2\pi(n+1))}_{1}$

$\to$ periodica di periodo $\frac{2\pi}{n+1}$

$$= \frac{j\rho^{n+1}}{j(n+1)} \underbrace{\left[\overbrace{e^{j2\pi(n+1)}}^{1} - \overbrace{e^{j0}}^{1} \right]}_{=0} = 0$$

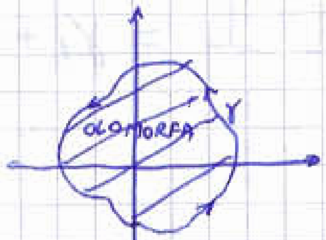
$\to = 0$ perché essendo periodica di periodo $\frac{2\pi}{n+1}$, i due valori sono uguali

$$\oint_\gamma (z - z_0)^n\,dz = \begin{cases} 2\pi\rho & \text{se } n = -1 \\ 0 & \text{se } n \neq -1 \end{cases}$$

Teorema di Cauchy

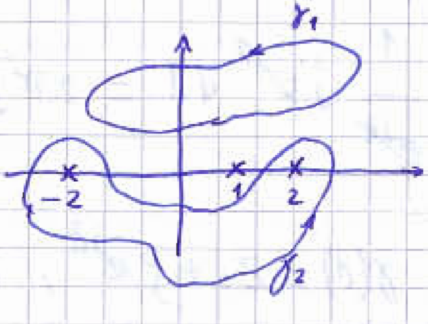
Data $F : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, olomorfa in Ω e un cammino chiuso γ che circonda una regione del piano complesso in cui F è olomorfa

$$\oint_\gamma F(z)\,dz = 0$$



Esempio

$$F(z) = \frac{z^3+z}{(z-1)^2(z+2)^3(z-2)}$$

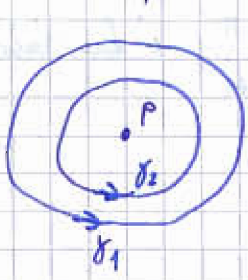


$\oint_{\gamma_1} F(z)\,dz = 0$ perché vale il teorema di Cauchy

$\oint_{\gamma_2} F(z)\,dz = ?$ perché la curva contiene punti (poli) in cui la funzione non è olomorfa $\rightarrow$ non vale il teorema di Cauchy

Conseguenza del Teorema di Cauchy

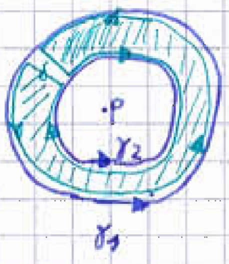
Data $F: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se γ_1 e γ_2 sono due cammini chiusi che circondano una volta in senso antiorario una regione nel piano complesso Ω tale che F è olomorfa su $\Omega \setminus \{P\}$, con $P \in \Omega$, allora:



$$\oint_{\gamma_1} F(z)\,dz = \oint_{\gamma_2} F(z)\,dz$$

Non importa quale cammino segua per circondare la singolarità.

Dim. Considero il disegno sopra. Cerco di costruire un cammino che non circondi P.



$$\Gamma = \gamma_1 + \delta - \gamma_2 - \delta$$

$$\oint_{\Gamma} F(z)dz = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint_{\gamma_1} F(z)dz + \cancel{\oint_{\delta} F(z)dz} - \oint_{\gamma_2} F(z)dz - \cancel{\oint_{\delta} F(z)dz} = 0$$

$$\Rightarrow \oint_{\gamma_1} F(z)\,dz = \oint_{\gamma_2} F(z)\,dz \qquad \blacksquare$$

Def. RESIDUO

Data una funzione $F: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, si dice RESIDUO della funzione F in p l'integrale

$$\text{Res}\{F, p\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} F(z)\,dz$$

dove γ è un cammino che circonda una volta in senso antiorario il punto p in modo tale che la zona del piano complesso racchiusa sia olomorfa in tutti i punti tranne p.

Ci sono due tipi di singolarità: POLARI e ESSENZIALI. Noi avremo a che fare solo con singolarità polari.

Def. SINGOLARITÀ POLARE

Data $F: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ si dice che F ha una singolarità polare di ordine n in $p \notin \Omega$ se esiste una funzione $G(z)$ olomorfa e $\varepsilon > 0$ tale che:

$$F(z) = \frac{G(z)}{(z-p)^n}, \quad \forall z \in B(p, \varepsilon) \setminus \{p\}$$

e non esiste $l < n$ tale che $F(z) = \dfrac{G_1(z)}{(z-p)^l}$, $\forall z \in B(p, \varepsilon) \setminus \{p\}$

con G_1 olomorfa in p.

COMPITINO: 7/05

PROPRIETÀ RESIDUI SINGOLARITÀ POLARI

Se $F: \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è olomorfa su Ω e se p è una singolarità polare di ordine n per F, allora:

$$\text{Res}\{F,p\} = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} F(z)(z-z_0)^n$$

DIM.

$\exists\, \varepsilon > 0$ tale che $F(z) = \dfrac{G(z)}{(z-p)^n}$, $\forall z \in B(p,\varepsilon) \setminus \{p\}$.

Visto che $G(z)$ è olomorfa, è anche analitica, quindi può essere espressa come serie di potenze.

$$G(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-p)^k \quad \forall z \in B(p,\varepsilon)$$

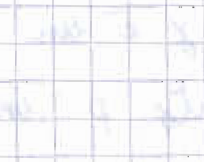
e quindi

$$F(z) = \frac{G(z)}{(z-p)^n} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-p)^{k-n}, \quad \forall z \in B(p,\varepsilon)$$

Calcolo ora il residuo applicando la formula

$$\text{Res}\{F,p\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_\gamma \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-p)^{k-n} dz =$$

γ circonda una volta in senso antiorario il punto p



Tagliamo $\gamma = p + \rho e^{j\vartheta}$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$ con $\rho < \varepsilon$

$$= \frac{1}{2\pi j} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \oint_\gamma (z-p)^{k-n} dz = \frac{1}{\cancel{2\pi} j} a_{n-1} \cdot \cancel{2\pi} j = a_{n-1}.$$

L'integrale è sempre nullo per $k-n \neq -1$ e vale $2\pi j$ per $k-n = -1$

e quindi per $k = n-1$

Ma, dalla formula già vista, so che $a_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dz^k} G(z) \Big|_{z=p}$.
Calcolo a_{n-1}:

$$a_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} G(z) \Big|_{z=p}$$

So che $G(z) = F(z)(z-p)^n \quad \forall z \in B(p,\varepsilon) \setminus \{p\}$

$$a_{n-1} = \lim_{z \to p} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} G(z)$$

sono passato al limite perché così ora posso sostituire il valore di $G(z)$

$$a_{n-1} = \lim_{z \to p} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} F(z)(z-p)^n = \operatorname{Res}\{F, p\}$$

Esempio

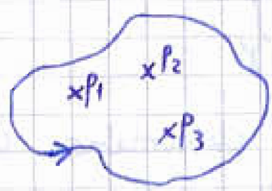
$F(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$, calcolare $\operatorname{Res}\{F, 1\}$, dove 1 ha ordine 2 $(n=2)$

$$\operatorname{Res}\{F, 1\} = \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \frac{z}{(z-1)^2} (z-1)^2 \Big|_{z=1} = 1$$

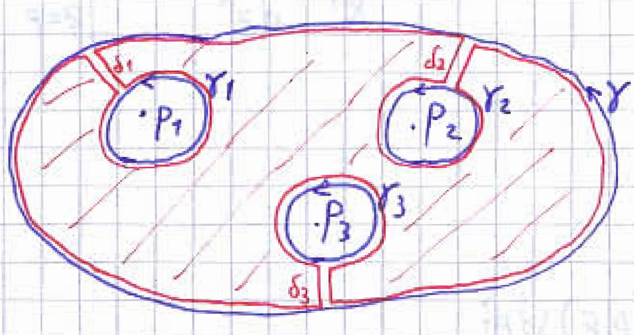
Teorema dei residui

Se $F: \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è olomorfa su Ω e se γ è un cammino chiuso che circonda una volta in senso antiorario una regione del piano complesso in cui F è olomorfa ovunque tranne che in un insieme finito di punti: $p_1, p_2, \dots, p_n$, allora:

$$\oint_\gamma F(z)\, dz = 2\pi j \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}\{F, p_i\}$$



Dim. per $n=3$



Costruisco γ_1, γ_2 e γ_3. Prendo una curva Γ che non contenga p_1, p_2, p_3.

$$\Gamma = \gamma + \cancel{\delta_1} - \gamma_1 - \cancel{\delta_1} + \cancel{\delta_2} - \gamma_2 - \cancel{\delta_2} + \cancel{\delta_3} - \gamma_3 - \cancel{\delta_3}$$

T. di Cauchy

$$\oint_\Gamma F(z)\,dz = \oint_\gamma F(z)\,dz - \oint_{\gamma_1} F(z)\,dz - \oint_{\gamma_2} F(z)\,dz - \oint_{\gamma_3} F(z)\,dz \overset{!}{=} 0$$

$$\oint_\gamma F(z)\,dz = 2\pi j \left[\frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma_1} F(z)\,dz + \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma_2} F(z)\,dz + \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma_3} F(z)\,dz \right] =$$

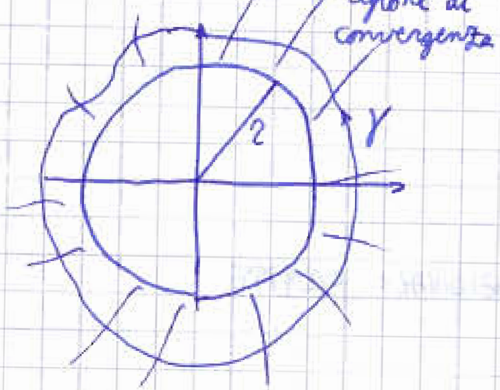
$$= 2\pi j \sum_{i=1}^{3} \mathrm{Res}\{F, p_i\} \quad \blacksquare$$

Proprietà 7 delle trasformate zeta: INTEGRALE DI INVERSIONE

Se x è un segnale a tempo discreto con trasformata zeta $X(z) = \mathcal{Z}\{x\}$ e raggio di convergenza r, allora

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_\gamma X(z) \cdot z^{k-1}\,dz$$

dove γ è un cammino chiuso appartenente alla regione $\{z : |z| > r\}$ e che circonda una volta l'origine in senso antiorario.



L'integrale, essendo in piano complesso, lo posso calcolare come somma di residui.

Dim.

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_{\gamma}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} x(i)\, z^{-i}\right) z^{k-1}\, dz =$$

scambio l'integrale con la serie. Ho sostituito a $X(z)=\sum_{i=0}^{+\infty} x(i)\, z^{-i}$.

$$= \frac{1}{2\pi j}\sum_{i=0}^{+\infty} x(i)\oint_{\gamma} z^{k-1-i}\, dz =$$

scegliamo come γ un cerchio con centro nell'origine di raggio $\rho > r$.

Tutti gli integrali nella somma sono nulli tranne quello per cui l'esponente $k-i-1=-1 \rightarrow k=i$ che vale $2\pi j$.

$$= \frac{1}{2\pi j}\, x(k)\, 2\pi j = x(k) \qquad \blacksquare$$

La funzione $X(z) = \dfrac{b_m z^m + \ldots + b_0}{(z-p_1)\ldots(z-p_n)}$, di grado relativo $\rho = n-m \geq 0$,

$Z[x]$ è definita solo all'esterno del cerchio (la trasformata zeta è definita lì), ma $X(z)$, ovvero la trasformata scritta in modo esplicito, ha dominio $\mathbb{C}\setminus\{p_1,\ldots,p_n\}$. Sembra una contraddizione.

Definisco $X(z)$ come PROLUNGAMENTO ANALITICO (o olomorfo) di $Z\{x\}$.

Def: data $F:\Omega\subset\mathbb{C}\rightarrow\mathbb{C}$ olomorfa su Ω, e $G:\Lambda\subset\mathbb{C}\rightarrow\mathbb{C}$ olomorfa su Λ con $\Lambda\supset\Omega$, si dice che G è il PROLUNGAMENTO ANALITICO (o OLOMORFO) di F a Λ se $F(z)=G(z)\ \forall z\in\Omega$

PROPRIETÀ: ANTITRASFORMATA DELLE FUNZIONI RAZIONALI FRATTE

Se x è un segnale a tempo discreto e se

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x\} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_0}{(z-p_1)(z-p_2)\ldots(z-p_n)}$$

allora

$$x(k) = \sum_{i \in \{\text{poli distinti di } X(z)\cdot z^{k-1}\}} \text{Res}\left\{X(z)\, z^{k-1}, p_i\right\}$$

Dim: dall'integrale di inversione so che $x(k) = \frac{1}{2\pi j}\oint_\gamma X(z)\, z^{k-1}\, dz$.
Applicando il teorema dei residui:

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \sum_{\substack{p_i \in \\ \{\text{poli di } X(z) z^{k-1}\}}} \text{Res}\left\{X(z)\, z^{k-1}, p_i\right\} \quad \blacksquare$$

In realtà, moltiplicando per z^{k-1} aggiungo un polo in 0, che devo considerare.

Esercizi

(1) $$X(z) = \frac{2z+3}{(z-1)(z-2)(z-3)}$$ Calcolo l'antitrasformata con la formula di inversione.

$$x(k) = \sum_{p_i} \text{Res}\left\{\frac{(2z+3)\, z^{k-1}}{(z-1)(z-2)(z-3)}, p_i\right\}$$. Osservo che se $k=0$ ho un polo in

Se $k=0$, $x(0)=\sum_{p\in\{0,1,2,3\}} \text{Res}\left\{\dfrac{2z+3}{z(z-1)(z-2)(z-3)}, p_i\right\} = 0$

Questo per la proprietà vista in controlli automatici:

$$\sum \text{Res}\left\{\frac{B(z)}{A(z)}\right\} = 0 \quad \text{se} \quad grA - grB > 1.$$

$$\text{Se } grA - grB = 1, \quad \sum \text{Res}\left\{\frac{b_m z^m + \dots + b_0}{a_n z^n + \dots + a_0}\right\} = \frac{b_m}{a_n}$$

Se $k>0$ abbiamo 3 poli. Chiamo $G(z) = \dfrac{(2z+3)\, z^{k-1}}{(z-1)(z-2)(z-3)}$

$$x(k) = \text{Res}\{G(z),1\} + \text{Res}\{G(z),2\} + \text{Res}\{G(z),3\} =$$

$$\text{Res}\{G(z),1\} = \frac{(2z+3)\, z^{k-1}}{\cancel{(z-1)}(z-2)(z-3)} \cdot \cancel{(z-1)}\Bigg|_{z=1} = \frac{5\cdot 1^{k-1}}{(-1)(-2)} = \frac{5}{2}$$

$$\text{Res}\{G(z),2\} = \frac{(2z+3)\, z^{k-1}}{(z-1)\cancel{(z-2)}(z-3)} \cancel{(z-2)}\Bigg|_{z=2} = \frac{7\cdot 2^{k-1}}{-1} = -7\cdot 2^{k-1}$$

$$\text{Res}\{G(z),3\} = \frac{(2z+3)\, z^{k-1}}{(z-1)(z-2)\cancel{(z-3)}} \cancel{(z-3)}\Bigg|_{z=3} = \frac{9\cdot 3^{k-1}}{2\cdot 1} = \frac{9}{2}\cdot 3^{k-1}$$

Sommo i residui

$$x(k) = \begin{cases} 0 & \text{se } k=0 \\ \dfrac{5}{2} - 7\cdot 2^{k-1} + \dfrac{9}{2}\cdot 3^{k-1} & \text{per } k\neq 0 \end{cases} = \left(\frac{5}{2} - 7\cdot 2^{k-1} + \frac{9}{2}\cdot 3^{k-1}\right)\cdot 1(k-1)$$

24/03/10

$$x(z) = \frac{z+3}{(z-1)^2(z-2)} \qquad \sum \text{Res}\left\{\frac{b_m z^m + \dots + b_0}{a_n z^n + \dots + a_0}\right\} = \begin{cases} 0 & \text{se } n-m>1 \\ \dfrac{b_n}{a_n} & \text{se } n-m=1 \\ ? & \text{se } n-m<1 \end{cases}$$

$$x(k) = \sum \text{Res}\left\{\frac{(z+3)\, z^{k-1}}{(z-1)^2(z-2)}\right\}$$

$x(0)=0$ perchè $n-m=3$ $\rightarrow$ polo nell'origine

$x(1)=0$ perchè $n-m=2$

$x(2)=1$ perchè $n-m=1$ } verifica

$\boxed{k>0}$ $x(k)=Res\{G(z),1\}+Res\{G(z),2\}$

$$Res\{G(z),2\}=\frac{(z+3)\,z^{k-1}\,\cancel{(z-2)}}{(z-1)^2\cancel{(z-2)}}\Bigg|_{z=2}=5\cdot 2^{k-1}$$

$$Res\{G(z),1\}=\frac{d}{dz}\,\frac{(z+3)\,z^{k-1}\,\cancel{(z-1)^2}}{\cancel{(z-1)^2}(z-2)}\Bigg|_{z=1}=\frac{(z-2)\left[z^{k-1}+(z+3)(k-1)z^{k-2}\right]-(z+3)z^{k-1}}{(z-2)^2}\Bigg|_{z=1}=$$

perchè polo ordine 2

$$=\frac{-\left(1+4(k-1)\right)-4}{1}=-4k-1$$

$x(k)=5\cdot 2^{k-1}-4k-1$.

mi aggiunge il caso $k=0$

In generale, $x(k)=\left(5\cdot 2^{k-1}-4k-1\right)1(k-1)$

ESERCIZIO

$$X(z)=\frac{1}{z^2(z-2)}\qquad x(k)=\sum Res\left\{\frac{1}{z^2(z-2)}\,z^{k-1}\right\}=\sum Res\left\{\frac{z^{k-3}}{z-2}\right\}$$

$x(0)=0$ perchè $n-m=4$

$x(1)=0$ perchè $n-m=3$

$x(2)=0$ perchè $n-m=2$ } casi particolari (poli dir polo nell'origine

$x(3)=1$ perchè $n-m=1$ $\rightarrow$ $\frac{b_0}{a_0}=1$ } verifica

Se $k>2$ ho un solo polo in 2

$$x(k) = Res\left\{\frac{z^{k-3}}{(z-2)}, 2\right\} = \frac{z^{k-3}}{z-2}(z-2)\Big|_{z=2} = 2^{k-3}$$

$$x(k) = \begin{cases} 0 & se \quad k = 0,1,2 \\ 2^{k-3} & se \quad k > 2 \end{cases} \rightarrow x(k) = 2^{k-3} \cdot 1(k-3)$$

ESERCIZIO

$$x(z) = \frac{1}{(z-a)^n} \quad \text{(fratto semplice) con } n \geq 1$$

$$x(k) = \sum Res\left\{z^{k-1} \cdot \frac{1}{(z-a)^n}\right\} \qquad x(0) = \sum Res\left\{z^{-1} \cdot \frac{1}{(z-a)^n}\right\} = 0 \text{ perché}$$

$$\rho = n - m = n+1 > 1.$$

se $k > 0$ ho un solo polo in a.

$$x(k) = Res\left\{\frac{z^{k-1}}{(z-a)^n}, a\right\} \underset{\substack{\text{applico}\\\text{formula}\\\text{completa}}}{=} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \frac{z^{k-1}}{\cancel{(z-a)^n}} \cancel{(z-a)^n}\Big|_{z=a}$$

$$z^{k-1} \xrightarrow{\frac{d}{dz}} (k-1) z^{k-2} \xrightarrow[d/dz]{} (k-1)(k-2) z^{k-3} \xrightarrow[d^{n-1}/dz^{n-1}]{} \underbrace{(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)}_{n-1 \text{ termini}} z^{k-n}$$

$$x(k) = \frac{1}{(n-1)!}(k-1)(k-2)\dots(k-n+1) \cdot a^{k-n} \quad \text{per } k > 0$$

In generale, $\boxed{\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{(z-a)^n}\right\} = \left[\frac{1}{(n-1)!}(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)\, a^{k-n}\right] 1(k-1)}$

Noto che $\boxed{x(k) = 0 \quad \forall k < n}$

Proprietà: se $X(z)$ è data dal rapporto di due polinomi con coefficienti reali e p, p^* sono due poli complessi coniugati,

$$\mathrm{Res}\{X(z), p\} = \mathrm{Res}\{X(z), p^*\}^*$$

E quindi

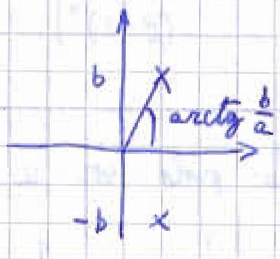
$$\mathrm{Res}\{X(z), p\} + \mathrm{Res}\{X(z), p^*\} = 2\,\mathrm{Re}\left\{\mathrm{Res}\{X(z), p\}\right\}$$

ESERCIZIO

$$X(z) = \frac{z}{(z-a)^2+b^2}$$

I poli sono $a \pm bj$, quindi $X(z)$ posso scriverla come

$$X(z) = \frac{z}{(z-(a+bj))(z-(a-bj))}$$



$$x(k) = \sum \mathrm{Res}\left\{\frac{z \cdot z^{k-1}}{(z-(a+bj))(z-(a-bj))}\right\} \quad z \cdot z^{k-1} \to z^k \to \text{nessun caso particolare!}$$

$$\left.\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ x(1) &= 1 \end{aligned}\right\} \text{per verifica}$$

$$x(k) = \mathrm{Res}\{G(z), a+bj\} + \mathrm{Res}\{G(z), a-bj\} = 2\,\mathrm{Re}\left\{\mathrm{Res}\{G(z), a+bj\}\right\} =$$

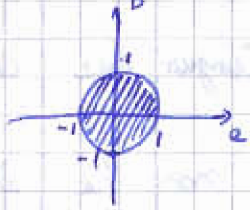
$$= 2\,\mathrm{Re}\left\{\left.\frac{z^k}{\cancel{(z-(a+bj))}(z-(a-bj))} \cdot \cancel{(z-(a+bj))}\right|_{z=a+bj}\right\} = 2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{(a+bj)^k}{2bj}\right\} = \text{lo scrivo come } \rho e^{j\varphi}$$

$$\underset{a>0}{=} 2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^k}{2b} e^{j\left(\mathrm{arctg}\frac{b}{a} k - \frac{\pi}{2}\right)}\right\} \underset{\mathrm{Re}\{e^{j\varphi}\} = \cos\varphi}{=} 2\,\frac{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^k}{2b} \cdot \cos\left(\mathrm{arctg}\frac{b}{a} \cdot k - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\arg\{a+bj\} = \begin{cases} \arctan\frac{b}{a} & \text{se } a>0 \\ \arctan\frac{b}{a} + \pi & \text{se } a<0 \\ \frac{\pi}{2} \cdot \mathrm{sgn}\, b & \text{se } a=0 \end{cases}$$

Se $a^2+b^2<1$, il segnale tenderà a 0

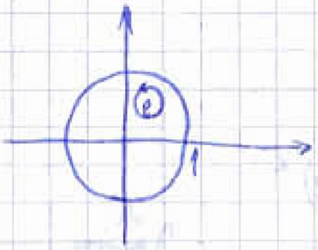
Se $a^2+b^2>1$, il segnale tenderà a ∞



Proprietà: se $F: \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa su Ω e se p è un polo di F tale che $|p|<1$, allora

$$\lim_{k\to\infty} Res\left\{F(z)\cdot z^{k-1}, p\right\} = 0$$

Dim.



$\gamma(\lambda) = p+\varepsilon e^{j\lambda}$, $\lambda \in [0, 2\pi]$, ε sufficientemente piccolo perché $|p|+\varepsilon<1$

$$Res\left\{F(z)z^{k-1}, p\right\} = \frac{1}{2\pi j}\oint_\gamma F(z)z^{k-1}\,dz = \frac{1}{2\pi j}\int_0^{2\pi} F(p+\varepsilon e^{j\lambda})(p+e^{j\lambda})^{k-1} j\varepsilon e^{j\lambda}\,d\lambda$$

$$dz = d\gamma$$

$$\frac{d\gamma}{d\lambda} = j\varepsilon e^{j\lambda}$$

$$\left|Res\left\{F(z)z^{k-1}, p\right\}\right| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M(|p|+\varepsilon)^{k-1}\varepsilon\,d\lambda = 2\pi M(|p|+\varepsilon)^{k-1}\varepsilon\cdot\frac{1}{2\pi}$$

$$\lim_{k\to\infty}\left|Res\left\{F(z)z^{k-1}, p\right\}\right| \le \lim_{k\to\infty}\frac{\cancel{2\pi}}{\cancel{2\pi}} M(|p|+\varepsilon)^{k-1}\varepsilon = 0 \quad \text{perché } |p|+\varepsilon<1$$

TEOREMA DEL VALORE FINALE

Se $X(z)$ è data dal rapporto di due polinomi con poli interni al cerchio unitario tranne, al più, un polo in 1 di ordine 1, allora:

$$\lim_{k\to\infty} x(k) = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z) \quad \text{dove } x(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left\{X(z)\right\}$$

Esempio

$$X(z) = \frac{z+3}{(z-1)(z-0{,}5)^2} \rightsquigarrow \lim_{k\to\infty} x(k) = \lim_{z\to 1}\frac{(z-1)(z+3)}{(z-1)(z-0{,}5)^2} = \frac{4}{(0{,}5)^2} = 16$$

Dim. distinguo due casi:

- se $X(z)$ non ha il polo in 1, $X(z) = \dfrac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_0}{(z-p_1)^{r_1}(z-p_2)^{r_2}\cdots(z-p_l)^{r_l}}$

$$\lim_{k\to\infty} x(k) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{l} \mathrm{Res}\{X(z)z^{k-1}, p_i\} = 0 \quad \text{perché } |p_i|<1 \ \forall i=1,\ldots,l$$

$$\lim_{z\to 1} (z-1)X(z) = \underbrace{\lim_{z\to 1}(z-1)}_{=0} \cdot \underbrace{\lim_{z\to 1} X(z)}_{\text{valore finito}} = 0$$

- se $X(z)$ ha il polo in 1, $X(z) = \dfrac{b_m z^m + \ldots + b_0}{(z-1)(z-p_1)^{r_1}\ldots(z-p_l)^{r_l}}$

$$\lim_{k\to\infty} x(k) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{l} \mathrm{Res}\{X(z)z^{k-1}, p_i\} + \lim_{k\to\infty} \mathrm{Res}\{X(z)z^{k-1}, 1\} = \overset{\text{da prima}}{0} + \lim_{k\to\infty} \mathrm{Res}\{X(z)z^{k-1}, 1\}$$

$$\mathrm{Res}\{X(z)z^{k-1}, 1\} = \lim_{z\to 1} X(z) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{tende a 1} \\ \text{per } z\to 1}}{z^{k-1}} (z-1) = \lim_{z\to 1} X(z)(z-1)$$

Quindi, $\lim_{k\to\infty} x(k) = \lim_{z\to 1} X(z)(z-1)$. ▪

SCOMPOSIZIONE IN FRATTI SEMPLICI

Se $X(z) = \dfrac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_0}{(z-p_1)^{r_1}(z-p_2)^{r_2}\ldots(z-p_l)^{r_l}}$, allora si può scrivere

$$X(z) = C_0 + \frac{C_{1,1}}{(z-p_1)} + \frac{C_{1,2}}{(z-p_1)^2} + \ldots + \frac{C_{1,r_1}}{(z-p_1)^{r_1}} + \frac{C_{2,1}}{(z-p_2)} + \frac{C_{2,2}}{(z-p_2)^2} + \ldots + \frac{C_{2,r_2}}{(z-p_2)^{r_2}} +$$

$$+ \frac{C_{l,1}}{(z-p_l)} + \frac{C_{l,2}}{(z-p_l)^2} + \ldots + \frac{C_{l,r_l}}{(z-p_l)^{r_l}}$$

dove $C_{i,j}$ è il coefficiente del fratto semplice di ordine j associato al polo p_i.

$$C_0 = \lim_{z\to\infty} X(z) \qquad C_{i,j} = \frac{1}{(r_i-j)!}\,\frac{d^{r_i-j}}{dz^{r_i-j}}\,X(z)(z-p_i)^{r_i}\Big|_{z=p_i}$$

$$C_{i,j} = \mathrm{Res}\left\{X(z)(z-p_i)^{j-1}, p_i\right\} = \mathrm{Res}\left\{\frac{b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \ldots + b_0}{(z-p_1)^{r_1}\ldots(z-p_i)^{r_i-j+1}\ldots(z-p_l)^{r_l}}\Big|_{z=p_i}\right\} =$$

$$= \frac{1}{(r_i-j)!}\,\frac{d^{r_i-j}}{dz^{r_i-j}}\,X(z)(z-p_i)^{j}\,(z-p_i)^{r_i-j+1}\Big|_{z=p_i} = \frac{1}{(r_i-j)!}\,\frac{d^{r_i-j}}{dz^{r_i-j}}\,X(z)(z-p_i)^{r_i}\Big|_{z=p_i}$$

25/03/10

$$X(z) = C_0 + \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{r_s}\frac{C_{i,j}}{(z-p_i)^j} = F(z)$$ modo di scrivere più compatto $\quad i=s,\ j=t$

<u>Verifica</u> per $z\to\infty$ si annullano $\rightarrow$ le funzioni sono strettamente proprie

$$\lim_{z\to\infty} F(z) = \lim_{z\to\infty} C_0 = C_0.$$

$$\mathrm{Res}\left\{F(z)(z-p_s)^{t-1}, p_s\right\}$$

$$F(z)(z-p_s)^{t-1} = C_0(z-p_s)^{t-1} + \sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{r_i}\frac{C_{i,k}}{(z-p_i)^k}(z-p_s)^{t-1} =$$

$$= \underbrace{C_0(z-p_s)^{t-1} + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq s}}^{l}\sum_{k=1}^{r_i}\frac{C_{i,k}}{(z-p_i)^k}(z-p_s)^{t-1}}_{G(z)} + \sum_{k=1}^{r_s}\frac{C_{s,k}}{(z-p_s)^k}(z-p_s)^{t-1} =$$

Quindi $\mathrm{Res}\left\{F(z)(z-p_s)^{t-1}, p_s\right\} = \frac{1}{2\pi j}\oint_\gamma\left[G(z) + \sum_{k=1}^{r_s}\frac{C_{s,k}}{(z-p_s)^k}(z-p_s)^{t-1}\right]dz$

con γ cerchio centrato in p_s, di raggio sufficientemente stretto da non contenere altri poli.

Tuttavia, $\oint_\gamma G(z)\,dz = 0$ perché $G(z)$ è olomorfa all'interno di γ, quindi rimane:

$$= \frac{1}{2\pi j}\oint\sum_{k=1}^{r_s} C_{s,k}(z-p_s)^{t-1-k}\,dz$$

Scambio integrale e sommatoria:

$$= \frac{1}{2\pi j} \sum_{k=1}^{\rho_s} \oint_\gamma C_{s,k} (z-p_s)^{t-1-k} dz = \frac{1}{2\pi j} C_{s,t} \cdot 2\pi j = C_{s,t}$$

Questo perché i termini $C_{s,k}(z-p_s)^{t-1-k}$ sono tutti nulli ad eccezione di esponente -1, quindi $\oint ... = 0$ se $t-1-k \neq -1$

$\oint ... = 2\pi j$ se $t-1-k = -1$, cioè $t=k$

ESERCIZI

Scomporre in fratti semplici:

1) $$\frac{2z+3}{(z-1)(z-2)(z-3)} = \frac{C_{11}}{z-1} + \frac{C_{21}}{z-2} + \frac{C_{31}}{z-3} \qquad C_0 = 0 \text{ perché } \rho = 2$$

I coefficienti di grado 1 corrispondono ai residui

$$C_{1,1} = Res\{X(z), 1\} = \frac{2z+3}{(z-1)(z-2)(z-3)} (z-1) \Big|_{z=1} = \frac{5}{2}$$

$$C_{2,1} = Res\{X(z), 2\} = \frac{2z+3}{(z-1)(z-2)(z-3)} (z-2) \Big|_{z=2} = -7$$

$$C_{1,1} + C_{2,1} + C_{3,1} = 0 \implies C_{3,1} = -C_{1,1} - C_{2,1} = \frac{9}{2}.$$

$$\frac{2z+3}{(z-1)(z-2)(z-3)} = \frac{5/2}{z-1} - \frac{7}{z-2} + \frac{9/2}{z-3}.$$ Ora antitrasformo per ottenere $x(k) = Z^{-1}\{X(z)\}$

Ricordo che $Z^{-1}\left\{\frac{1}{(z-p)^n}\right\} = \frac{1}{(n-1)!} (k-1)(k-2)\dots(k-n+1)\, p^{k-n}\, 1(k-1)$ e quindi

$$Z^{-1}\left\{\frac{1}{z-p}\right\} = p^{k-1}\, 1(k-1)$$

$$x(k) = \frac{5}{2} 1^{k-1} 1(k-1) - 7 \cdot 2^{k-1} 1(k-1) + \frac{9}{2} 3^{k-1} 1(k-1) = \left[\frac{5}{2} - 7 \cdot 2^{k-1} + \frac{9}{2} 3^{k-1} \right] 1(k-1)$$

② $$X(z) = \frac{z+3}{(z-2)(z-1)^2} = \frac{C_{1,1}}{z-2} + \frac{C_{2,1}}{z-1} + \frac{C_{2,2}}{(z-1)^2}$$

$$C_{1,1} = \operatorname{Res}\{X(z), 2\} = \frac{z+3}{\cancel{(z-2)}(z-1)^2} \cdot \cancel{(z-2)} \bigg|_{z=2} = \frac{5}{1} = 5$$

$$C_{2,2} = \operatorname{Res}\{X(z)(z-1), 1\} = \frac{z+3}{(z-2)\cancel{(z-1)^2}} \cancel{(z-1)^2} \bigg|_{z=1} = -4$$

$C_{2,1} = -C_{1,1} = -5$ perché $\rho = 2$, quindi la somma dei residui/coefficienti di ordine 1 deve essere 0.

$$X(z) = \frac{5}{z-2} - \frac{5}{z-1} - \frac{4}{(z-1)^2}$$ Ora antitrasformo

$$x(k) = 5 \cdot 2^{k-1} \cdot 1(k-1) - 5 \cdot 1^{k-1} 1(k-1) - 4(k-1) 1^{k-2} \cdot 1(k-1) = \left[5 \cdot 2^{k-1} - 5 - 4(k-1) \right] 1(k-1)$$

CAMPIONAMENTO DEI SEGNALI

NOTAZIONE

$x(t)$ → segnale a tempo continuo $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$

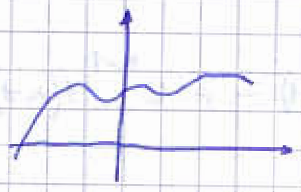
$x^*(k) = x(kT)$ → segnale a tempo discreto ottenuto campionando $x(t)$ con tempo di campionamento T. $X(z) = \mathcal{Z}\{x^*(k)\}$

$$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)\, x(kT) \rightarrow X^*(s) = \mathcal{L}\{x^*(t)\}$$

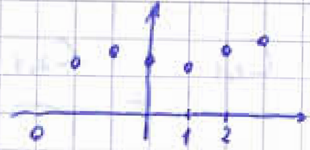
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, x(t)\, dt = x(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\, x(t)\, dt = x(t_0)$$

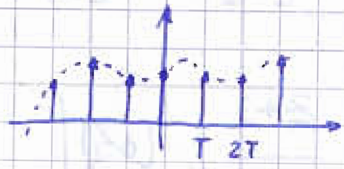
$$\delta(t-t_0)\, x(t) = \delta(t-t_0)\, x(t_0)$$



Segnale a Tempo Continuo



Segnale a Tempo Discreto



Segnale campionato a Tempo Discreto rappresentato come Segnale Continuo

Proprietà [Relazione tra $X(z)$ e $X^*(s)$]

Se $x(t)$ è un segnale a tempo continuo e $x^*(k) = x(kT)$, $T>0$, allora $\mathcal{L}\{x^*(t)\} = \mathcal{Z}\{x^*(k)\}\Big|_{z=e^{sT}}$

Dim.

$$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT)\, \delta(t-kT)$$

$$\mathcal{L}\{x^*(t)\} = \int_0^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT)\, \delta(t-kT)\, e^{-st}\, dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT) \int_0^{+\infty} \delta(t-kT)\, e^{-st}\, dt =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT) \begin{cases} 0 & \text{se } k<0 \text{ perché le } \delta \text{ campiona un punto non compreso nell'intervallo di integrazione} \\ e^{-skT} \end{cases}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} x(kT)\, e^{-skT} = \sum_{k=0}^{+\infty} x(kT)\left(e^{sT}\right)^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} x(kT)\, z^{-k}\Big|_{z=e^{sT}} = \mathcal{Z}\{x^*(k)\}\Big|_{z=e^{sT}}$$

Esempio

$x(t) = e^{-t}$, $x^*(k) = e^{-kT}$

$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)\, e^{-kT}$ Calcolo le trasformate

$$X(z) = Z\{e^{-kT}\} = Z\{(e^{-T})^k\} = \frac{z}{z-e^{-T}}$$ Trasformata Zeta

$$X^*(s) = \frac{e^{sT}}{e^{sT}-e^{-T}}$$ Trasformata di Laplace (trascendente, scomoda!)

<u>Proprietà</u> [Relazione tra $X(s)$ e $X^*(s)$]

Se $x(t)$ è un segnale a tempo continuo e $x^*(t)$ è il segnale ottenuto campionando x con tempo di campionamento T e $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, allora

$$\mathcal{L}\{x^*(t)\} = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(s - \frac{2\pi}{T}kj\right) = X^*(s)$$

<u>Dim.</u>

$$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT)\,\delta(t-kT) \overset{\text{proprietà delta}}{=} \underbrace{\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)\right]}_{\text{Treno di delta } y(t)} x(t) =$$

$y(t)$ è periodica di periodo T e si può scrivere come $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$ con $a_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t)\, e^{-j\frac{2\pi}{T}kt}\,dt$

Nel nostro caso, considero solo $k=0$, e

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)\, e^{-j\frac{2\pi}{T}kt}\,dt = \frac{1}{T}$$ quindi

$$y(t) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$$

Ora devo fare la trasformata di Laplace, ricordando che:

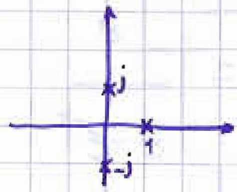
$$\mathcal{L}\{e^{j\omega t}x(t)\} = X(s-j\omega)$$ (proprietà traslazione in frequenza)

diventa:

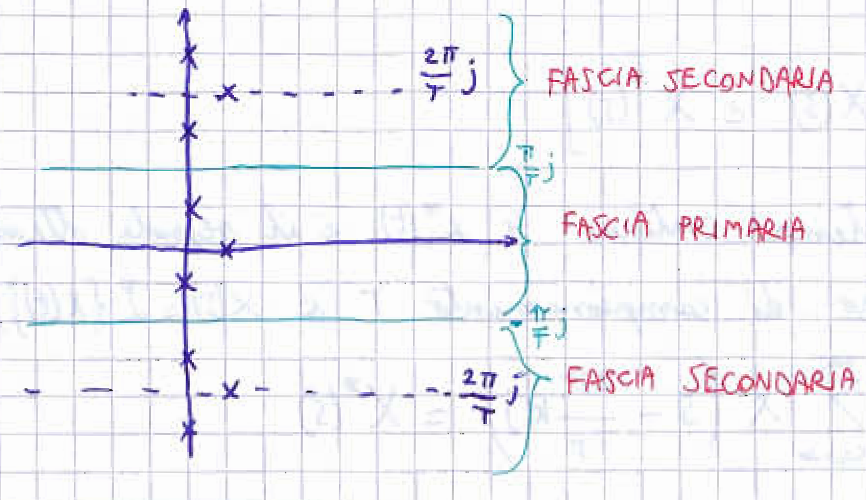
$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j\frac{2\pi}{T}kt}x(t)\right\} = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\mathcal{L}\left\{e^{j\frac{2\pi}{T}kt}x(t)\right\} = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(s-\frac{2\pi}{T}kj\right)$$

Esempio

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+1)}$$



Il segnale campionato è composto da repliche di $X(s)$:



TRASFORMATA DI FOURIER

Def: Dato un segnale a tempo continuo x, la sua trasformata di Fourier è data da:

$$\mathcal{F}\{x\}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

C'è una stretta parentela con la trasformata di Laplace, che però non considera i tempi negativi (monolatera)

$$\mathcal{L}\{x\} = \int_{0}^{+\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$$

Proprietà (Legame tra T. di Fourier e T. di Laplace)

Se $x(t)$ è un segnale a tempo continuo con $x(t) = 0 \ \forall t < 0$, allora

$$F\{x\}(\omega) = \mathcal{L}\{x\}\Big|_{s=j\omega}$$

Dim.

$$\mathcal{F}\{x\}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{0}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \mathcal{L}\{x\}(s)\Big|_{s=j\omega} \qquad \blacksquare$$

perché $x(t)=0 \;\; \forall t<0$

Nell'esempio precedente, $X(j\omega) = \dfrac{1}{(j\omega+1)\left((j\omega)^2+1\right)}$

Proprietà (Relazione tra T. zeta e T. di Fourier)

Se $x(t)$ è un segnale a tempo continuo, con $x(t)=0 \;\; \forall t<0$, e $x^*(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(kT)\,\delta(t-kT)$, allora

$$\mathcal{F}\{x^*\}(\omega) = \mathcal{Z}\{x(kT)\}\Big|_{z=e^{j\omega T}}$$

Dim.

$$\mathcal{F}\{x^*\}(\omega) = \mathcal{L}\{x^*\}\Big|_{s=j\omega} \qquad \text{sappiamo che } \mathcal{L}\{x^*\} = \mathcal{Z}\{x(kT)\}\Big|_{z=e^{sT}}$$

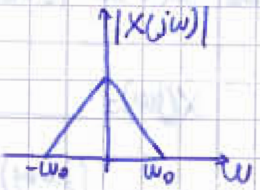
$$= \mathcal{Z}\{x(kT)\}\Big|_{z=e^{sT}}\Big|_{s=j\omega} = \mathcal{Z}\{x(kT)\}\Big|_{z=e^{j\omega T}} \qquad \blacksquare$$

Riassumendo

da \ a	Laplace	Fourier	Zeta
Laplace	/	$s=j\omega$	$e^{sT}=z$
Fourier	$j\omega=s$	/	$e^{j\omega T}=z$
Zeta	$z=e^{sT}$	$z=e^{j\omega T}$	/

Def.

Il segnale a tempo continuo $x(t)$ è un SEGNALE PASSA BASSO con banda ω_0 se la sua trasformata di Fourier $X(j\omega)$ soddisfa la relazione $X(j\omega) = 0, \ \forall \omega : |\omega| > \omega_0$.



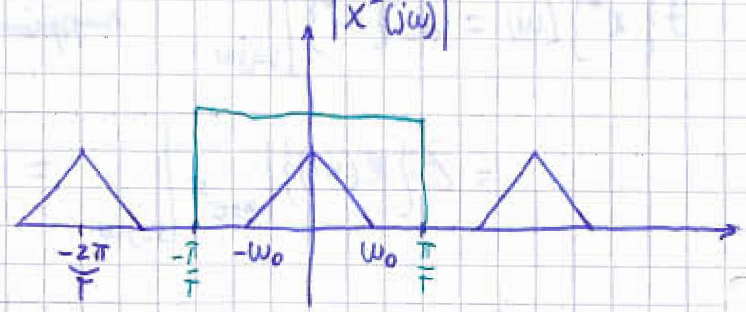
Teorema del campionamento

Dato un segnale a tempo continuo x passa basso di banda ω_0, se vale la condizione $T < \frac{\pi}{\omega_0}$, allora è possibile ricostruire x a partire dal segnale campionato $x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT)\,\delta(t-kT)$ tramite un filtro passa basso ideale di ampiezza T e banda $\frac{\pi}{T}$.

Dim.

$$\mathcal{L}\{x^*\} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(s - j\frac{2\pi}{T}k\right)$$

$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(j\left(\omega - \frac{2\pi}{T}k\right)\right)$$



Le copie di $X(j\omega)$ sono separate se vale la condizione di Nyquist:

$$\frac{2\pi}{T} - \omega_0 > \omega_0 \qquad T < \frac{\pi}{\omega_0}.$$

Corrisponde a una frequenza di campionamento $f > \frac{2\omega_0}{2\pi}$, cioè $f > 2f_0$ dove $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$

È quindi possibile ricostruire il segnale con il seguente filtro:

$$F_{ID}(j\omega)=\begin{cases}T & se \quad |\omega|\le \frac{\pi}{T}\\ 0 & se \quad |\omega|>\frac{\pi}{T}\end{cases}$$

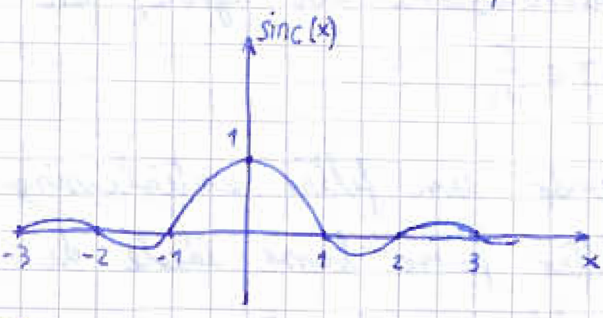
Ora mi chiedo: è possibile usare F_{ID} come filtro nei sistemi di controllo? Guardo la risposta all'impulso, che ottengo antitrasformando.

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{X(j\omega)\right\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega$$

$$h_{ID}(t)=\mathcal{F}^{-1}\left\{F_{ID}(j\omega)\right\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_{ID}(j\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}}T\,e^{j\omega t}\,d\omega=$$

$$=\frac{T}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}}e^{j\omega t}\,d\omega=\frac{T}{2\pi}\left[\frac{e^{j\omega t}}{jt}\right]_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}}=\frac{T}{2\pi}\,\frac{e^{j\frac{\pi}{T}t}-e^{-j\frac{\pi}{T}t}}{j\omega}=$$ vedo che somiglia a un seno!

$$=\frac{T}{\pi t}\,sen\left(\frac{t}{T}\pi\right)=\frac{sen\left(\frac{t}{T}\pi\right)}{\frac{t}{T}\pi}=sinc\left(\frac{t}{T}\right)$$ dove $sinc(x)=\frac{\sin\pi x}{\pi x}$

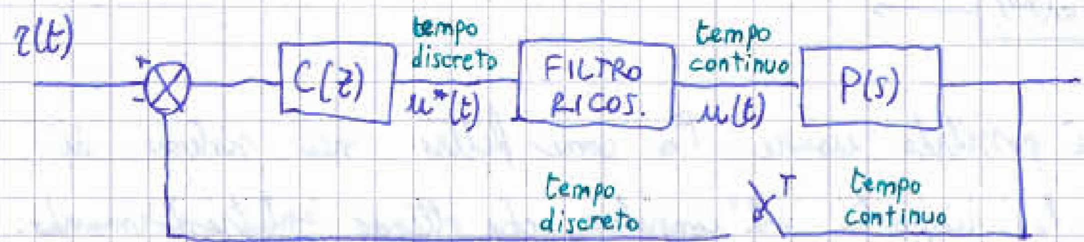


Non possiamo usare questo filtro per i controlli perchè:

- non è causale e, quindi, non è realizzabile
- la versione ritardata (quindi causale e realizzabile) introduce un ritardo nel segnale di uscita che può essere pericoloso nei sistemi di controllo.

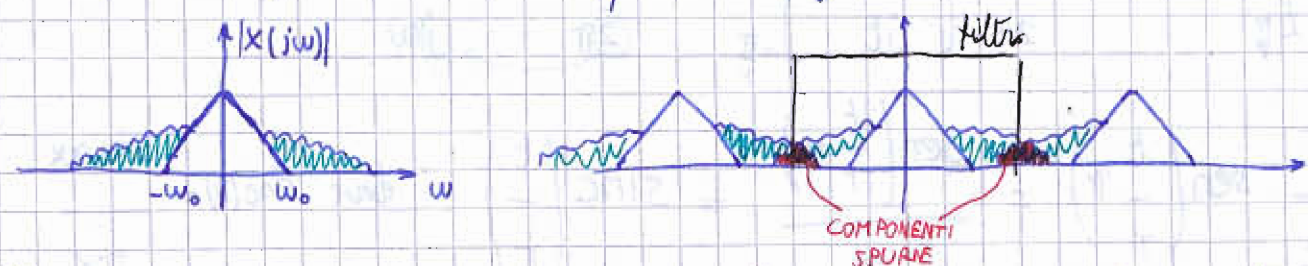
Il filtro precedente può essere utilizzato nei sistemi di comunicazione perché un ritardo è accettabile essendo un sistema ad anello aperto (nessuna retroazione)

Un sistema di controllo, invece, è ad anello chiuso:



Pertanto mi interessa di più ridurre al minimo i ritardi piuttosto che ricostruire perfettamente il segnale. Utilizzeremo un filtro molto rozzo per il nostro scopo, il FILTRO DI HOLD.

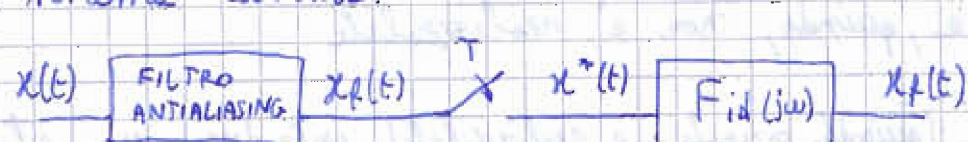
Prima di questo, parliamo di ALIASING. I segnali passa basso ideali non esistono, nella realtà questi segnali hanno delle code:



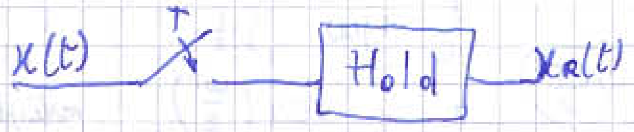
Queste componenti spurie disturbano la ricostruzione del segnale, in quanto è stata violata la condizione $T < \frac{\pi}{\omega_0}$.

Questo problema si risolve inserendo un filtro antialiasing prima del campionatore, che è un filtro passa basso ideale di banda $\frac{\pi}{T}$ che taglia le code che genererebbero componenti spurie.

Il sistema diventa:

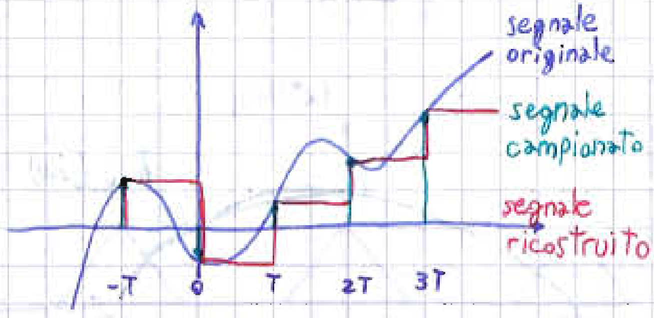


Vediamo ora il FILTRO DI HOLD.



Il filtro di Hold ha risposta all'impulso $h(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$, quindi è causale e quindi realizzabile.

Vediamo un esempio grafico per capire meglio il funzionamento.



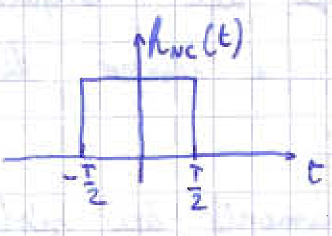
In pratica, mantiene il valore della delta per tutto il periodo.

$$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT)\,\delta(t-kT) \longrightarrow x_R(t) = x^*(t) * h(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT)\,h(t-kT)$$

Per periodi/tempi di campionamento molto piccoli, l'errore è molto piccolo.

Vediamo ora cosa succede in frequenza. Considero $h(t)$ come due filtri distinti: un ritardo di $T/2$ e un filtro di hold non causale.

dove $h_{NC}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$



In pratica, è come se il filtro di hold mi ritardasse l'ingresso di $T/2$ e di questo dovrò tenere conto nella progettazione dei controllori.

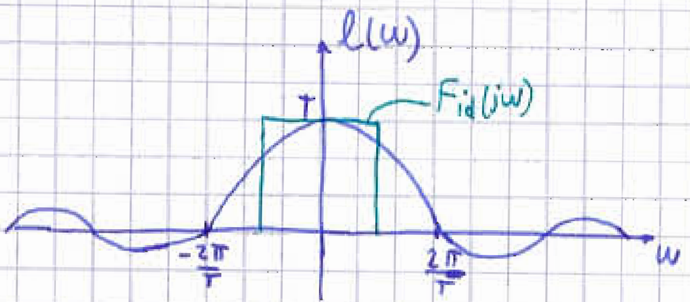
Calcolo ora $H_{NC}(j\omega)$, ovvero la risposta in frequenza del filtro di Hold.

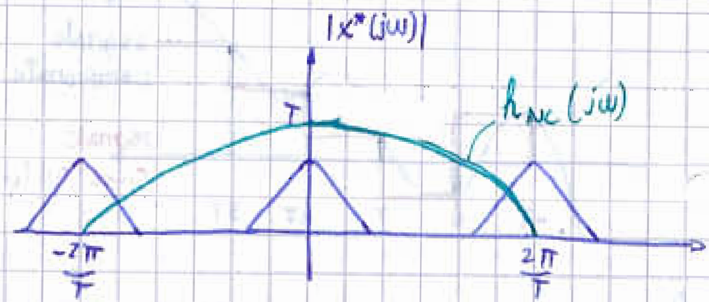
$$H_{N.C.}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_{N.C.}(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 \cdot e^{-j\omega t}\, dt = \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} =$$

$$= \frac{e^{-j\omega\frac{T}{2}} - e^{j\omega\frac{T}{2}}}{-j\omega} = \frac{e^{j\omega\frac{T}{2}} - e^{-j\frac{\omega T}{2}}}{j\omega\, 2} \cdot \frac{2}{\ } = \frac{sen\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega}{2}} =$$

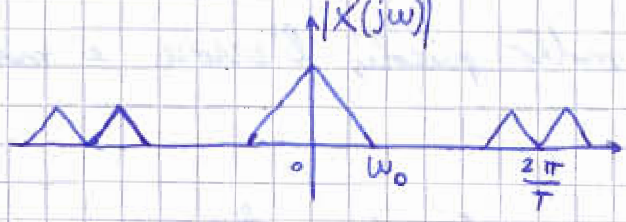
moltiplico e divido per

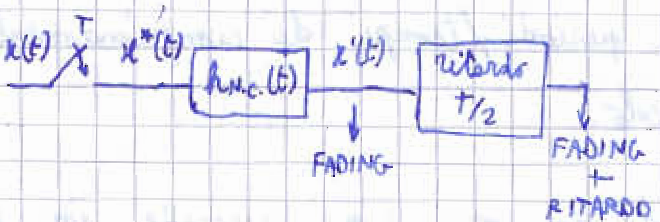
$$= \frac{sen\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega T}{2}} \cdot T = \frac{sen\left(\frac{\omega T \pi}{2\pi}\right)}{\frac{\omega T \pi}{2\pi}} \cdot T = \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right) \cdot T = l(\omega)$$





Pertanto, il segnale ricostruito avrà delle componenti ad alta frequenza non presenti nel segnale di partenza (FADING)





COMPITINO 13:30 – 15:30 8/04/10

Gli esercizi del 1° compitino saranno su:

- sistemi a tempo discreto
- stabilità
- campionamento dei sistemi a tempo continuo.

2 domande di teoria + 5/6 esercizi brevi

SISTEMA A TEMPO DISCRETO

Un sistema a tempo discreto P è un operatore che associa ad un segnale a tempo discreto di ingresso u un segnale a tempo discreto di uscita y. Scriviamo

$$y(k) = P\{u(k)\}$$

Esempi:

1) $y(k) = u(k) - u(k-1)$ L TI
2) $y(k) = \sum_{i=-\infty}^{k} u(i)$ L TI
3) $y(k) = u^2(k)$ NL TI
4) $y(k) = k\,u(k)$ L NTI

SISTEMA LINEARE

Il sistema a tempo discreto P è lineare quando, se u_1 e u_2 sono segnali a tempo discreto e $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$, vale:

$$P\{a_1 u_1(k) + a_2 u_2(k)\} = a_1 P\{u_1(k)\} + a_2 P\{u_2(k)\}$$

SISTEMA TEMPO INVARIANTE

Il sistema a tempo discreto P è tempo invariante quando, se u e y sono segnali a tempo discreto per cui $y(k) = P\{u(k)\}$, vale

$$y(k-n) = P\{u(k-n)\} \quad , \forall n \in \mathbb{Z}$$

cioè l'uscita del sistema non dipende dal tempo: spostando l'ingresso si sposta anche l'uscita.

RISPOSTA ALL'IMPULSO

Dato un sistema a tempo discreto P, lineare e tempo invariante, la sua risposta all'impulso $p(k)$ è l'uscita del sistema corrisponden all'ingresso $\delta(k)$ cioè $p(k) = P\{\delta(k)\}$.

Negli esempi precedenti:

1) $p(k) = \delta(k) - \delta(k-1)$

2) $p(k) = \sum_{i=-\infty}^{k} \delta(i) = \begin{cases} 0 & \text{se } k<0 \\ 1 & \text{se } k \geq 0 \end{cases} = 1(k)$

3) $p(k) = \delta^2(k) = \delta(k)$

4) $p(k) = 0$

Proprietà (uscita dei sistemi LTI)

Se P è un sistema a tempo discreto, lineare e tempo invariante, con risposta all'impulso $p(k) = P\{\delta(k)\}$, allora, se u è un segnale a tempo discreto:

$$P\{u(k)\} = u(k) * p(k)$$

Dim.

$$u(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} u(i)\, \delta(k-i)$$

$$P\{u(k)\} = P\left\{\sum_{i=-\infty}^{+\infty} u(i)\, \delta(k-i)\right\} \overset{\text{linearità}}{=} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} u(i)\, P\{\delta(k-i)\} \overset{\text{tempo invariante}}{=} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} u(i)\, p(k-i) =$$

$$= u(i) * p(k) \quad \blacksquare$$

Quindi posso scrivere:

$$P\{u(k)\} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} p(i)\, u(k-i) = \underbrace{\sum_{i=-\infty}^{-1} p(i)\, u(k-i)}_{\substack{\text{COMPONENTE NON CAUSALE} \\ k-i>k}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{+\infty} p(i)\, u(k-i)}_{\substack{\text{COMPONENTE CAUSALE} \\ k-i \leq k}} =$$

$$= P\{u(k)\} = y(k)$$

Se $p(i) = 0$, $\forall i<0$, la componente non causale sparisce, il sistema si dice CAUSALE.

Vediamo ora come scrivere l'uscita nel dominio della trasformata Zeta. Ricordiamo che $Z\{u * n\} = Z\{n\} \cdot Z\{p\}$, ma solo quando l'ingresso è nullo per $k<0$.

Proprietà (Trasformata zeta dell'uscita di un sistema LTI)

Se P è un sistema lineare, tempo invariante e causale e u è un segnale a tempo discreto tale che $u(k)=0$, $\forall k<0$, allora

$$\mathcal{Z}\{P\{u(k)\}\} = \mathcal{Z}\{p(k)\}\,\mathcal{Z}\{u(k)\}$$

dove p è la risposta all'impulso di P.

Dim.

$$\mathcal{Z}\{P\{u(k)\}\} = \mathcal{Z}\{p(k) * u(k)\}$$

Visto che $p(k)=0$ $\forall k<0$ (sistema causale) e $u(k)=0$ $\forall k<0$ (ipotesi su u

$$\mathcal{Z}\{P\{u(k)\}\} = \mathcal{Z}\{p(k)\}\cdot\mathcal{Z}\{u(k)\}$$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

Se P è un sistema a tempo discreto lineare, tempo invariante e causale, la sua funzione di trasferimento è data da:

$$P(z) = \mathcal{Z}\{P\{\delta(k)\}\}$$

Graficamente quindi: $\xrightarrow{u(k)} \boxed{P(z)} \xrightarrow{y(k)}$

Ottengo quindi le seguenti proprietà, valide se $u(k)=0$ $\forall k<0$:

$$Y(z) = P(z)\cdot U(z) \qquad\qquad P(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

Se un sistema è causale e se $u(k)=0$, $\forall k<0$, la funzione di trasferimento è il rapporto tra la trasformata z dell'uscita e quella dell'ingresso.

Negli esempi precedenti:

1) $y(k) = u(k) - u(k-1) \rightarrow p(k) = \delta(k) - \delta(k-1)$

$$P(z) = Z\{p(k)\} = 1 - z^{-1} = \frac{z-1}{z}$$

2) $y(k) = \sum_{i=-\infty}^{k} u(i) \rightarrow p(k) = 1(k) \qquad P(z) = \frac{z}{z-1}$

EQUAZIONE ALLE DIFFERENZE

EQUAZIONE DI FIBONACCI

$$\begin{cases} x(k+2) = x(k+1) + x(k) \\ x(0) = x(1) = 1 \end{cases}$$

Metodo risolutivo più semplice: sostituzione!

$x(2) = x(1) + x(0) = 2$

$x(3) = x(2) + x(1) = 3$

$x(4) = x(3) + x(2) = 5$

...

Vogliamo trovare un'espressione che ci consenta di trovare tutti i termini in un colpo solo. Faccio la trasformata zeta

$Z\{x(k+1)\} = z X(z) - z\, x(0) \qquad Z\{x(k)\} = X(z)$

$Z\{x(k+2)\} = z^2 X(z) - z^2 x(0) - z\, x(1)$

$z^2 X(z) - z^2 x(0) - z\, x(1) = z X(z) - z\, x(0) + X(z)$

$z^2 X(z) - z^2 \cancel{-z} = z X(z) \cancel{-z} + X(z) \qquad X(z) = \frac{z^2}{z^2 - z - 1}$

Calcolo ora l'antitrasformata:

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z^2}{z^2-z-1}\right\} \qquad z^2-z-1=0 \quad p_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\begin{cases}\frac{1+\sqrt5}{2}\\ \frac{1-\sqrt5}{2}\end{cases}$$

$$X(z)=\frac{z^2}{\left(z-\frac{1-\sqrt5}{2}\right)\left(z-\frac{1+\sqrt5}{2}\right)}$$ applico la formula dei residui:

$$x(k)=\sum \mathrm{Res}\left\{\underbrace{\frac{z^2\cdot z^{k-1}}{\left(z-\frac{1-\sqrt5}{2}\right)\left(z-\frac{1+\sqrt5}{2}\right)}}_{G(z)}\right\}=\sum \mathrm{Res}\left\{\frac{z^{k+1}}{\left(z-\frac{1-\sqrt5}{2}\right)\left(z-\frac{1+\sqrt5}{2}\right)}\right\}=$$

$$=\mathrm{Res}\{G(z),p_1\}+\mathrm{Res}\{G(z),p_2\}=\left.\frac{z^{k+1}}{z-\frac{1+\sqrt5}{2}}\right|_{z=\frac{1-\sqrt5}{2}}+\left.\frac{z^{k+1}}{z-\frac{1-\sqrt5}{2}}\right|_{z=\frac{1+\sqrt5}{2}}=$$

$$=\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{k+1}\cdot\frac{1}{\sqrt5}+\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{k+1}\frac{1}{\sqrt5}=\frac{\sqrt5}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{k+1}-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{k+1}\right]$$

In generale un'equazione alle differenze lineare, stazionaria e autonoma è data da

$$\begin{cases}x(k+n)=a_{n-1}\,x(k+n-1)+a_{n-2}\,x(k+n-2)+\ldots+a_0\,x(k)\\ x(0)=x_0,\ x(1)=x_1,\ldots,\ x(n-1)=x_{n-1}\end{cases}$$

Stazionaria perché $a_{n-1},\ldots$ non dipendono da k ma sono fisse.
Autonoma perché x è funzione solo di sé stesso.

Per risolverla, eseguo 3 passi:

1) Applico la trasformata zeta: $\mathcal{Z}\{x(k+n)\}=z^n\left[X(z)-\sum_{k=0}^{n-1}x(k)z^{-k}\right]$

2) Trovo $X(z)$

3) Antitrasformo $x(k)=\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$

Considero l'equazione

$$\begin{cases} y(k) = (1+\alpha)\, y(k-1) + u(k) & \text{con } \alpha > 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

14/04/10

Vediamo ora la definizione di un sistema a tempo discreto con equazioni alle differenze non autonome.

Definiamo il SISTEMA A TEMPO DISCRETO P che associa ad un ingresso $u(k)$, tale che $\exists \bar{k}$, $u(k)=0 \ \forall k<\bar{k}$, un segnale di uscita $y(k)$ secondo la relazione

$$\begin{cases} y(k) = 0 & \forall k<\bar{k} \\ a_0 y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) \ldots - a_n y(k-n) + b_0 u(k) + b_1 u(k-1) \ldots + b_m u(k-m), & \forall k \geq \end{cases}$$

dove $a_0, a_1, \ldots a_n, b_0, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$ e $a_0 \neq 0$.

Con questo sistema ci assicuriamo la causalità del sistema.

Il sistema P è lineare, tempo invariante e causale.

Proprietà (Funzione di trasferimento del sistema P)

Il sistema P definito sopra ha come funzione di trasferimento

$$P(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_n z^{-n}}$$

Dim.

Poniamo $u(k) = \delta(k)$ e calcoliamo $Y(z) = \mathcal{Z}\{y\}$.

So che $\delta(k) = 0 \ \forall k<0$, per cui $\bar{k} = 0$ e quindi $y(k) = 0 \ \forall k<0$.

$$\mathcal{Z}\{y(k-l)\} = z^{-l} Y(z)$$

$\mathcal{Z}\{\delta(k)\} = 1 \qquad \mathcal{Z}\{\delta(k-l)\} = z^{-l}$

Sostituisco nell'equazione alle differenze

$$a_0 Y(z) = -a_1 z^{-1} Y(z) - a_2 z^{-2} Y(z) \dots - a_n z^{-n} Y(z) + b_0 \cdot 1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}$$

da cui deriva la tesi $\quad Y(z) = \dfrac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} = P(z)$ ∎

Tornando all'esempio precedente, se volessi calcolare la f.d.t. $P(z)$ di $y(k) = (1+\alpha)\, y(k-1) + u(k)$ ho due strade:

- $P(z) = \dfrac{1}{1-(1+\alpha) z^{-1}} = \dfrac{z}{z-(1+\alpha)}$

- $Y(z) = (1+\alpha) z^{-1} Y(z) + U(z) \longrightarrow Y(z) = \underbrace{\dfrac{z}{z-(1+\alpha)}}_{P(z)} U(z)$

risposta all'impulso $p(k) \longleftrightarrow P(z)$ funzione di trasferimento

equazione alle differenze

Esercizi

1) $y(k) = 5y(k-1) - 6y(k-2) + u(k) - u(k-2)$

$$Y(z) = 5z^{-1} Y(z) - 6z^{-2} Y(z) + U(z) - z^{-2} U(z)$$

$$Y(z) = \frac{1-z^{-2}}{1-5z^{-1}+6z^{-2}} U(z) = \boxed{\frac{z^2-1}{z^2-5z+6}} U(z)$$

$P(z)$ FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

Calcolo ora la risposta all'impulso antitrasformando.

$$x(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{P(z)\} = \sum \text{Res}\left\{\frac{(z^2-1)\,z^{k-1}}{(z-3)(z-2)}\right\}$$ per $k=0$, $\rho=1$

$x(0)=1$

$k>0$

$$x(k) = \text{Res}\{G(z),3\} + \text{Res}\{G(z),2\} = \frac{8\cdot 3^{k-1}}{1} - 3\cdot 2^{k-1} = 8\cdot 3^{k-1} - 3\cdot 2^{k-1}$$

2) Data la funzione di trasferimento

$$H(z) = \frac{z-1}{z^2+z+1}$$

calcolare l'equazione alle differenze.

$$H(z) = \frac{z^{-1}-z^{-2}}{1+z^{-1}+z^{-2}} \rightarrow Y(z) = H(z)\,U(z) = \frac{z^{-1}-z^{-2}}{1+z^{-1}+z^{-2}}\,U(z)$$

$$(1+z^{-1}+z^{-2})\,Y(z) = (z^{-1}-z^{-2})\,U(z)$$

$$y(k) + y(k-1) + y(k-2) = u(k-1) - u(k-2)$$

$$y(k) = -y(k-1) - y(k-2) + u(k-1) - u(k-2).$$

3) Dato un sistema con $u(k) = 1(k)$ e $y(k) = k\cdot 0{,}5^k\cdot 1(k)$, trovare la funzione di trasferimento $P(z)$.

$$P(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} \qquad U(z) = \mathcal{Z}\{u(k)\} = \frac{z}{z-1}$$

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{y(k)\} = \mathcal{Z}\{k\cdot 0{,}5^k\} = -z\cdot\frac{d}{dz}\,\mathcal{Z}\{0{,}5^k\} = -z\cdot\frac{d}{dz}\,\frac{z}{z-0{,}5} =$$

$$= \frac{-z\,[z-0{,}5-z]}{(z-0{,}5)^2} = \frac{0{,}5\,z}{(z-0{,}5)^2}$$

$$P(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0,5\,z}{(z-0,5)^2} \cdot \frac{z-1}{z} = \frac{0,5\,(z-1)}{(z-0,5)^2}$$

Ripartiamo dall'esempio precedente e mettiamo un dato iniziale $\neq 0$

$$\begin{cases} y(k) = (1+\alpha)\, y(k-1) + u(k) \\ y(-1) = C \end{cases}$$

$Z\{y(k-1)\} = z^{-1} Y(z) + y(-1)$ devo aggiungere i termini $y(k)$ per $k<0$.

$$Z\{y(k-i)\} = z^{-i} Y(z) + \sum_{l=0}^{i-1} y(l-i)\, z^{l}$$

$$Y(z) = (1+\alpha)\left[z^{-1} Y(z) + C\right] + U(z)$$

$$Y(z) = \frac{C}{1-(1+\alpha)z^{-1}} + \frac{U(z)}{1-(1+\alpha)z^{-1}} = \boxed{\frac{z}{z-(1+\alpha)}\, C} + \boxed{\frac{z}{z-(1+\alpha)}\, U(z)}$$

EVOLUZIONE LIBERA — EVOLUZIONE FORZATA

↳ dipende dai dati iniziali

In generale, vediamo ora:

EVOLUZIONE TOTALE DELLE EQUAZIONI ALLE DIFFERENZE LINEARI, NON AUTONOM

$$\begin{cases} a_0\, y(k) = -a_1\, y(k-1) - a_2\, y(k-2) \ldots - a_n y(k-n) + b_0\, u(k) + b_1 u(k-1) + \ldots + b_m u(k-m \\ y(-1), y(-2), \ldots, y(-n) \text{ sono arbitrari} \end{cases}$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\, y(k-i) = \sum_{i=0}^{m} b_i\, u(k-i)$$ ora faccio la trasformata

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \left[z^{-i} Y(z) + \sum_{l=0}^{i-1} y(l-i)\, z^{-l}\right] = \sum_{i=0}^{m} b_i \left[z^{-i} U(z) + \sum_{l=0}^{i-1} u(l-i)\, z^{-l}\right]$$

Risolvo rispetto a $Y(z)$.

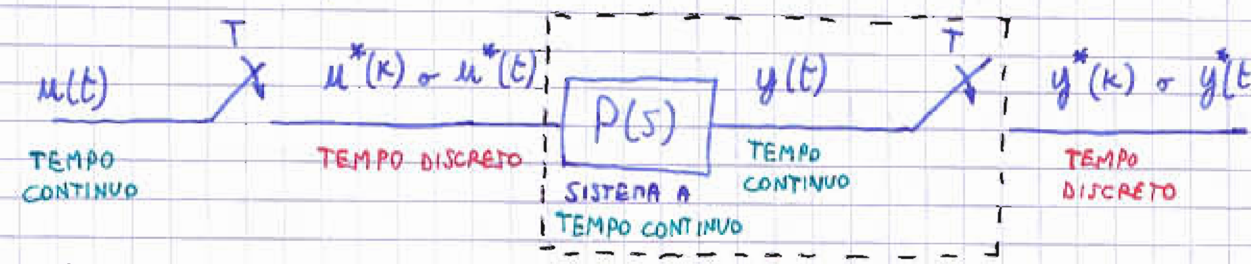
$$Y(z) = \boxed{\frac{\sum_{i=0}^{m} b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{n} a_i z^{-i}} U(z)} + \boxed{\frac{\sum_{i=0}^{m} b_i \sum_{l=0}^{i-1} u(l-i) z^{-l} - \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{l=0}^{i-1} y(l-i) z^{-l}}{\sum_{i=0}^{n} a_i z^{-i}}}$$

EVOLUZIONE FORZATA → dipende dall'ingresso forzante

EVOLUZIONE LIBERA → dipende dai dati iniziali $(l-i) < 0$

DISCRETIZZAZIONE DEI SISTEMI A TEMPO CONTINUO

Consideriamo questo schema:



$u^*(K) = u(KT)$ ingresso campionato

$$u^*(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \delta(t-KT)\, u(KT)$$

Def.

Dato un sistema a tempo continuo P lineare, tempo invariante e causale con risposta all'impulso $p(t)$, definiamo l'equivalente a tempo discreto come il sistema che associa all'ingresso $u^*(k)$ il segnale d'uscita

$$y^*(K) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} u^*(i)\, p(t-iT) \Big|_{t=KT}$$

Dim.

$$u^*(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta(t-iT)\, u^*(i) \qquad y(t) = p(t) * \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta(t-iT)\, u^*(i)$$

$$y(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \left[p(t) * \delta(t-iT)\right] u^*(i) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} p(t-iT)\, u^*(i)$$

$$y^*(K) = y(KT) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} p(t-iT)\, u^*(i) \Big|_{t=KT} \quad \blacksquare$$

Proprietà

1) L'equivalente a tempo discreto è un sistema
- lineare
- tempo invariante
- causale

2) La risposta all'impulso dell'equivalente a tempo discreto di un sistema con risposta all'impulso $p(t)$ è data da
$$p^*(k) = p(kT)$$

<u>Dim</u>

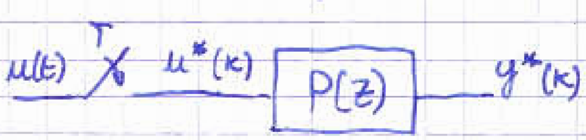
Poniamo $u^*(k) = \delta(k)$ e consideriamo quindi $u^*(t) = \delta(t)$.
L'uscita corrispondente sarà $y(t) = p(t)$. Occorre ora campionare al tempo kT: $y^*(k) = y(kT) = p(kT)$.
La risposta all'impulso è data da $y^*(k) = p(kT) = p^*(k)$ ∎

15/04/2010

3) La funzione di trasferimento è data da $P(z) = \mathcal{Z}\{p^*(k)\}$

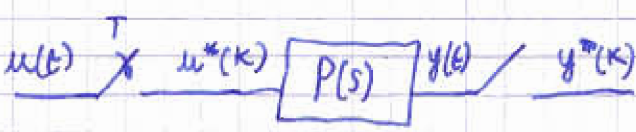
$$P(z) = \mathcal{Z}\{p(kT)\} = \mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\{P(s)\}\big|_{t=kT}\right\} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{Z}\{P(s)\}$$ trasformata z della trasformata di Laplace

Possiamo ridisegnare il sistema:



che mi permette di eliminare il sistema a tempo continuo.
Questa è la REGOLA DI RIDUZIONE fondamentale.

Nel primo sistema:



si avrà $Y(s) = U^*(s)\,P(s)$ da cui, applicando la regola di riduzione

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{Y(s)\} = \mathcal{Z}\{U^*(s)\,P(s)\}$$

Uguagliandola con quella del nuovo sistema $Y(z)=U(z)P(z)$ si ha:

$$Z\{U^*(s)\cdot P(s)\} = U(z)\cdot P(z)$$

Per poter applicare la regola di riduzione occorre che:
- l'ingresso sia un segnale campionato
- l'uscita venga immediatamente campionata.

Calcolo di $P(z)$ da $P(s)$

I) $P(s)=\dfrac{1}{s+a} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} p(t)=e^{-at} \longrightarrow p^*(k)=p(kT)=e^{-aTk}$ $\quad P(z)=Z\{P(s)\}=Z\{p(kT)\}$

Da qui ricavo $P(z)=Z\{(e^{-aT})^k\} = \dfrac{z}{z-e^{-aT}}$

II) $P(s)=\dfrac{1}{(s+a)^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} p(t)=te^{-at} \longrightarrow p^*(k)=p(kT)=kTe^{-akT}$

$$Z\{kb^k\}=\frac{bz}{(z-b)^2}$$

$$\longrightarrow P(z)=Z\{kTe^{-akT}\} = T\cdot\frac{e^{-aT}z}{(z-e^{-aT})^2} = Z\left\{\frac{1}{(s+a)^2}\right\}$$

III) $P(s)=\dfrac{1}{s(s+a)}$ scompongo in fratti semplici

$$P(s)=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+a} \qquad A=\frac{1}{s(s+a)}\cdot s\bigg|_{s=0}=\frac{1}{a} \qquad B=\frac{1}{s(s+a)}(s+a)\bigg|_{s=-a}=-\frac{1}{a}$$

$$P(s)=\frac{1/a}{s}+\frac{-1/a}{s+a}=\frac{1}{a}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+a}\right]$$

$$Z\left\{\frac{1}{s(s+a)}\right\}=\frac{1}{a}\left[Z\left\{\frac{1}{s}\right\}-Z\left\{\frac{1}{s+a}\right\}\right]=\frac{1}{a}\left[\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-aT}}\right]=$$

$$= \frac{z}{a}\left[\frac{z-e^{-aT}-z+1}{(z-1)(z-e^{-aT})}\right] = \frac{1}{a}\,\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$$

C'è anche una formula diretta per passare dalla trasformata di Laplace alla Zeta.

Formula per il passaggio diretto da $P(s)$ a $P(z)$

Se $P(s)$ è una funzione razionale strettamente propria:

$$P(z) = \sum_{\substack{p_i \in \text{poli} \\ \text{di } P(s)}} \text{Res}\left\{P(s)\cdot\frac{z}{z-e^{sT}}, p_i\right\}.$$

I residui vanno calcolati nella variabile s, non z.

Esempio

$$P(s) = \frac{1}{(s+a)^2} \qquad P(z) = \text{Res}\left\{\frac{1}{(s+a)^2}\cdot\frac{z}{z-e^{sT}}, -a\right\} = \frac{d}{ds}\,\frac{1}{\cancel{(s+a)^2}}\,\frac{z}{z-e^{sT}}\,\cancel{(s+a)^2}\Bigg|_{s=-a} =$$

$$= z\cdot\frac{Te^{sT}}{(z-e^{sT})^2}\Bigg|_{s=-a} = \frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}.$$

Proprietà

Se $P(s)$ è un segnale trasformato con Laplace e $n \in \mathbb{N}$, allora

$$\mathcal{Z}\left\{P(s)\,e^{-sTn}\right\} = z^{-n}\,\mathcal{Z}\left\{P(s)\right\}.$$

Ci dà il passaggio tra operatore di ritardo della trasformata di Laplace e quello di Zeta.

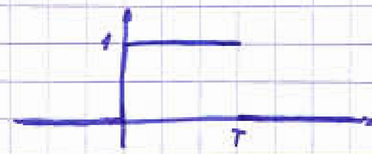
Dim.

$$\mathcal{Z}\left\{P(s)e^{-sTn}\right\} \overset{def}{=} \mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{P(s)e^{-sTn}\right\}\Big|_{t=kT}\right\} = \mathcal{Z}\left\{p(t-Tn)\Big|_{t=kT}\right\} = \mathcal{Z}\left\{p((k-n)T)\right\} =$$

$$= \mathcal{Z}\{r^*(k-n)\} \overset{\text{proprietà segnale ritardato}}{=} z^{-n}\,\mathcal{Z}\{r^*(k)\} = z^{-n}\cdot\mathcal{Z}\{P(s)\} \quad \blacksquare$$

Vediamo come applicare questa regola al filtro di hold.
Ricordiamo che la risposta all'impulso del filtro di hold è:

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \le t < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



$$h(t) = 1(t) - 1(t-T)$$

Posso quindi calcolare $H(s)$ trasformando $h(t)$:

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s} = \frac{1-e^{-sT}}{s}$$

Proprietà (Trasformata zeta di $H(s)P(s)$)

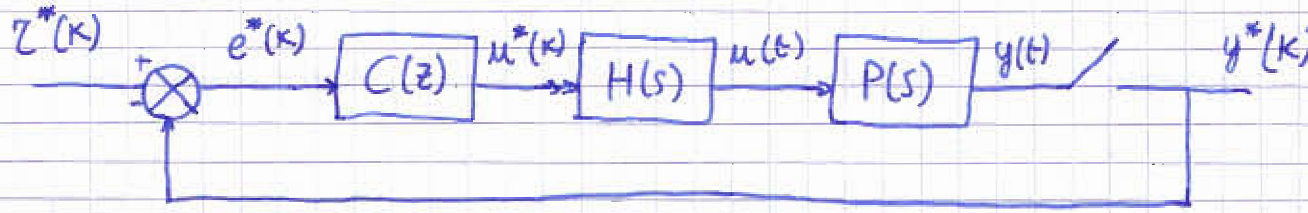
$$\mathcal{Z}\{H(s)\cdot P(s)\} = \frac{z-1}{z}\cdot\mathcal{Z}\left\{\frac{P(s)}{s}\right\}$$

Dim.

$$\mathcal{Z}\{H(s)\cdot P(s)\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s}\cdot P(s)\right\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{P(s)}{s}\right\} - \mathcal{Z}\left\{\frac{e^{-sT}P(s)}{s}\right\} =$$

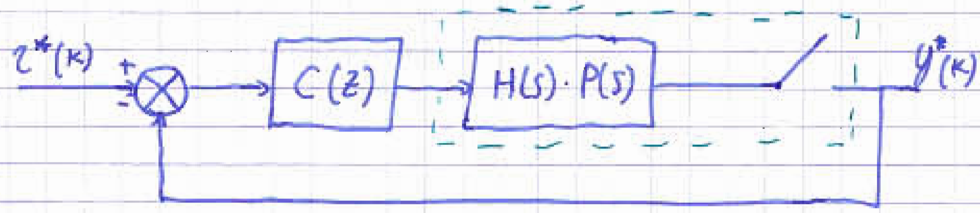
$$= \mathcal{Z}\left\{\frac{P(s)}{s}\right\} - z^{-1}\cdot\mathcal{Z}\left\{\frac{P(s)}{s}\right\} = (1-z^{-1})\,\mathcal{Z}\left\{\frac{P(s)}{s}\right\} = \frac{z-1}{z}\cdot\mathcal{Z}\left\{\frac{P(s)}{s}\right\} \quad \blacksquare$$

Iniziamo ora a calcolare le funzioni di trasferimento dei sistemi.

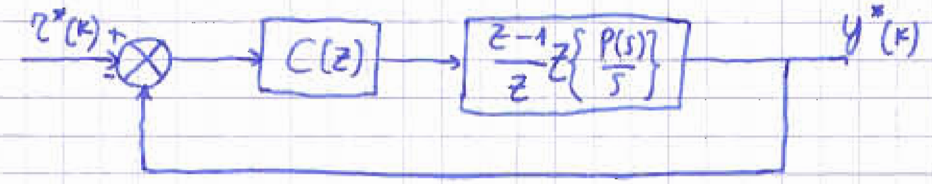


Mi viene chiesto $T_{r^*}^{y^*}(z) = ?$

Il primo passaggio è quello di accorpare i due sistemi a tempo continuo $H(S)$ e $P(S)$.



Ora controllo che il sistema tratteggiato possa essere sostituito, mediante la regola di riduzione, con l'equivalente a tempo discreto.



E quindi la funzione di trasferimento è (sistema retroazionato):

$$T_{r^*}^{y^*}(z) = \frac{C(z)\,\frac{z-1}{z}\,\mathcal{Z}\left\{\frac{P(S)}{S}\right\}}{1 + C(z)\,\frac{z-1}{z}\,\mathcal{Z}\left\{\frac{P(S)}{S}\right\}}$$

Vediamo ora un esempio concreto.

$$C(z) = \frac{z}{z-0,5} \qquad P(S) = \frac{1}{S+3} \qquad \mathcal{Z}\{H(S)P(S)\} = \frac{z-1}{z}\,\mathcal{Z}\left\{\frac{P(S)}{S}\right\}$$

$$\mathcal{Z}\{H(S)P(S)\} = \frac{z-1}{z}\,\mathcal{Z}\left\{\frac{1/3}{S} - \frac{1/3}{S+3}\right\} = \frac{z-1}{z}\cdot\frac{1}{3}\left[-\frac{z}{z-e^{-3T}} + \frac{z}{z-1}\right] =$$

$$= \frac{z-1}{z}\cdot\frac{z}{3}\left[\frac{-z+1+z-e^{-3T}}{(z-e^{-3T})(z-1)}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{1-e^{-3T}}{z-e^{-3T}}\right] = A(z)$$

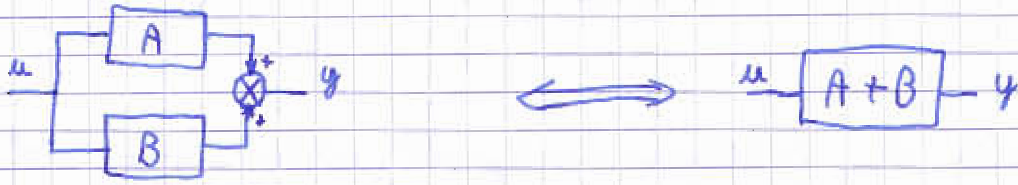
Scrivo quindi la funzione di trasferimento:

$$T_{r^*}^{y^*}(z) = \frac{C(z)\,A(z)}{1+C(z)\,A(z)} = \frac{\frac{z}{z-0,5}\cdot\frac{1}{3}\,\frac{1-e^{-3T}}{z-e^{-3T}}}{1+\frac{z}{z-0,5}\cdot\frac{1}{3}\,\frac{1-e^{-3T}}{z-e^{-3T}}} = \frac{z\left(1-e^{-3T}\right)}{3(z-0,5)(z-e^{-3T}) + z\left(1-e^{-3T}\right)}$$

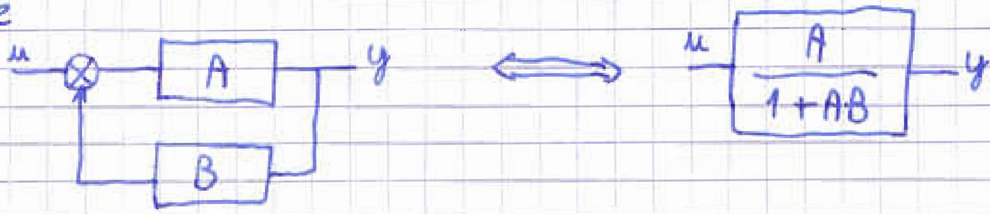
Regole di riduzione

- serie

- parallelo



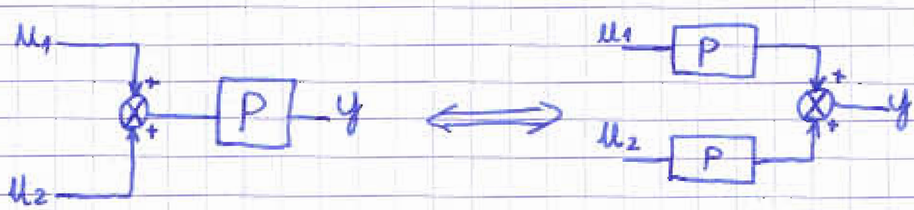
- retroazione



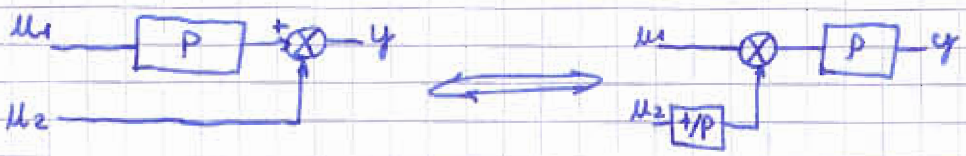
- spostamento del punto di prelievo a valle di un blocco

- spostamento del punto di prelievo a monte di un blocco

- spostamento del nodo sommatore a valle di un blocco

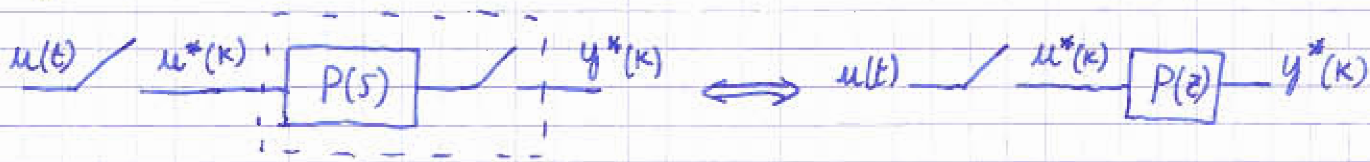


- spostamento del nodo sommatore a monte di un blocco



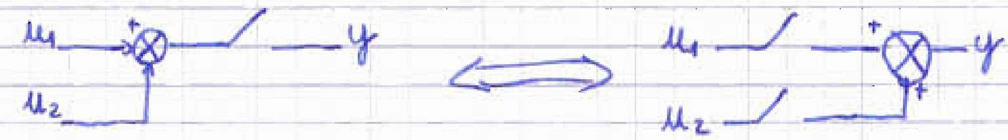
- scambio dei sommatori

- equivalente a tempo discreto new!



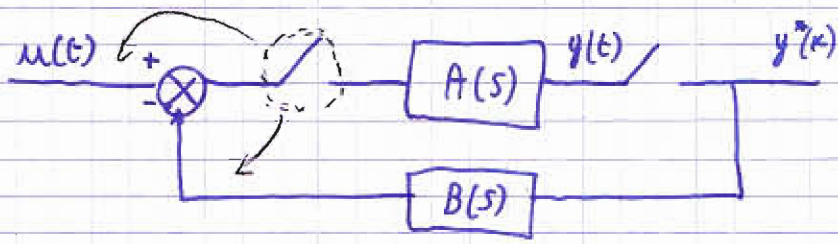
- spostamento del campionatore a valle di un prelievo new!

- spostamento del campionatore a monte di un sommatore new!

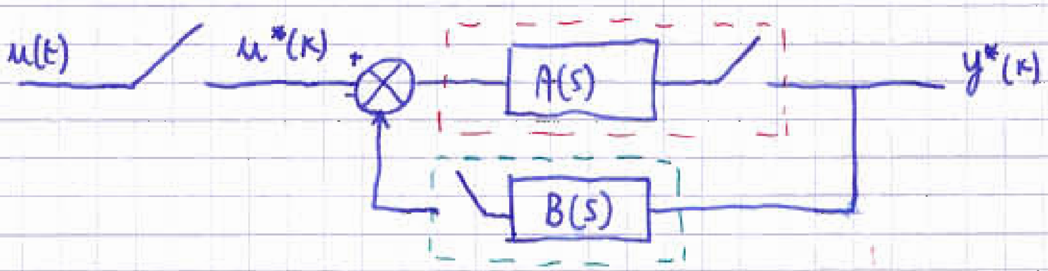


21/04/2010

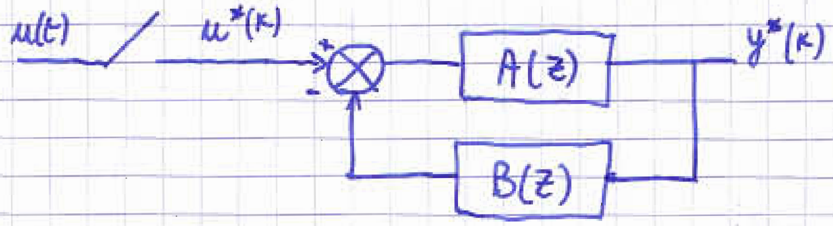
Esempio



A(s) ha l'ingresso campionato e l'uscita direttamente campionata, quindi posso sostituirgli l'equivalente a tempo discreto.
Per B(s) non ho il campionatore in uscita. Sposto quindi il campionatore a monte del sommatore duplicandolo:



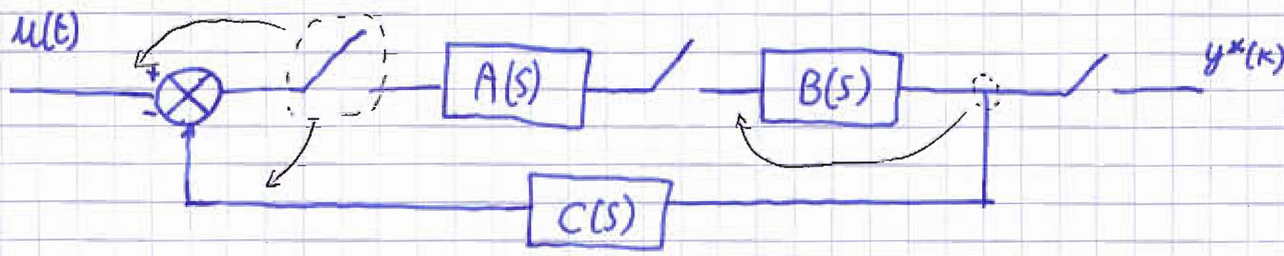
Sostituisco ora gli equivalenti a tempo discreto



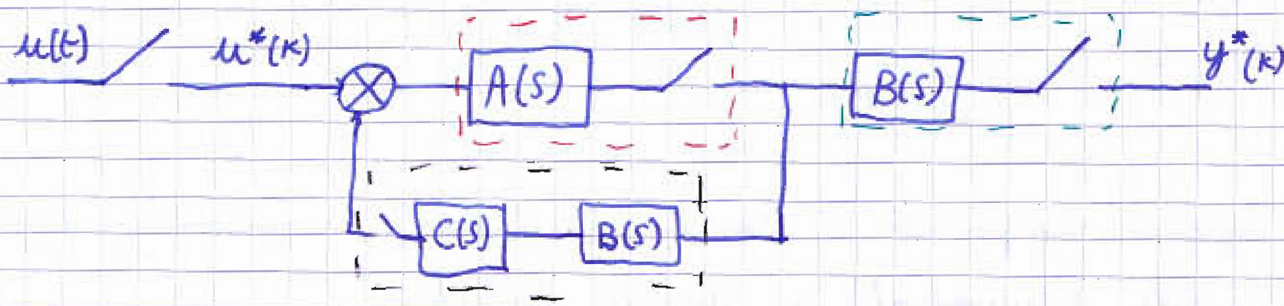
Posso ora calcolare la funzione di trasferimento.

$$T_{u^*}^{y^*}(z) = \frac{A(z)}{1 + A(z)B(z)}$$

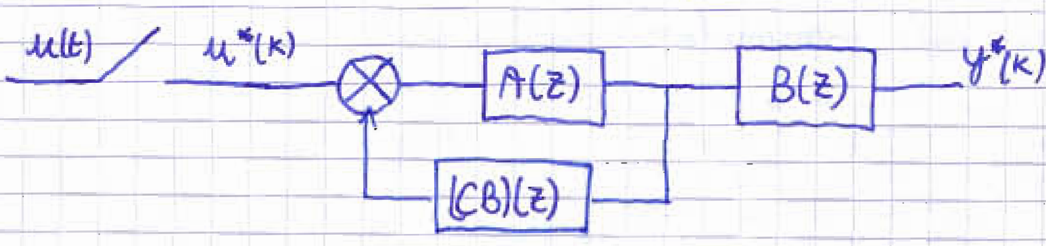
Esempio



Posso spostare il primo campionatore a monte del sommatore. Inoltre, sposto il punto di prelevamento a monte di $B(S)$, creando due rami:



Posso ora sostituire con gli equivalenti a tempo discreto

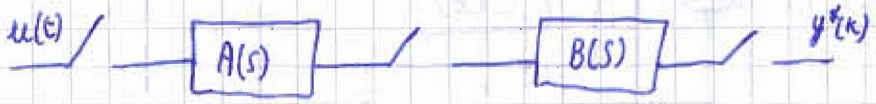


dove $(CB)(z) = Z\{C(s) \cdot B(s)\}$ <u>NON</u> $C(z) \cdot B(z)$!!

La funzione di trasferimento risulta:

$$T_{u^*}^{y^*} = \frac{A(z)\,B(z)}{1 + A(z)\,(BC)(z)}.$$

Notare che non potevo spostare l'ultimo campionatore a monte del punto di prelevamento, altrimenti avrei modificato il sistema.
Inoltre:

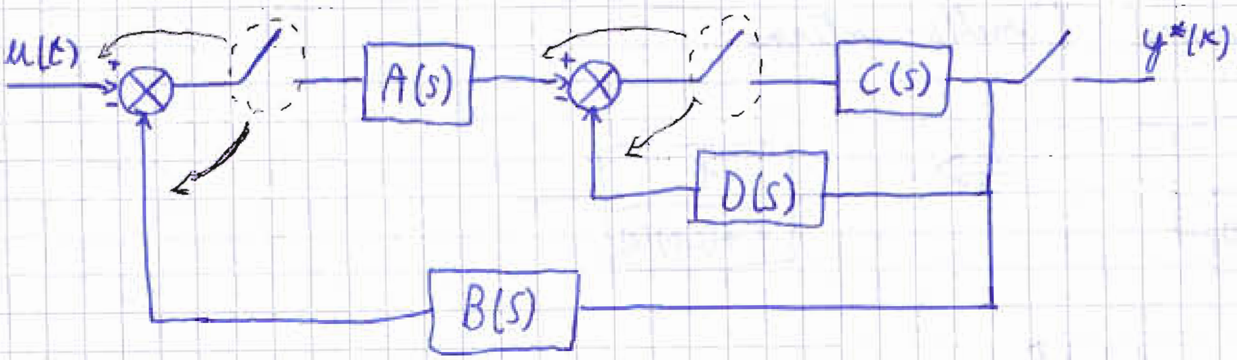
1) 

$T_{u^*}^{y^*} = A(s) \cdot B(s)$

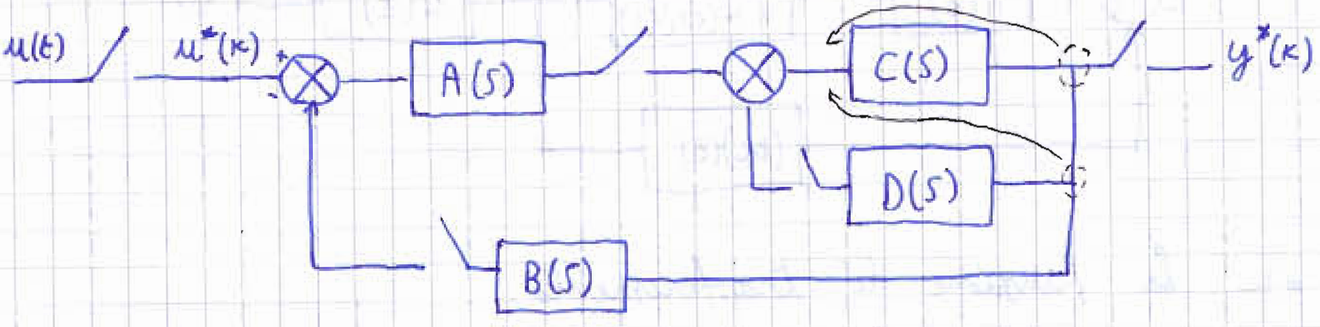
2) 

$T_{u^*}^{y^*} = (BA)(s)$

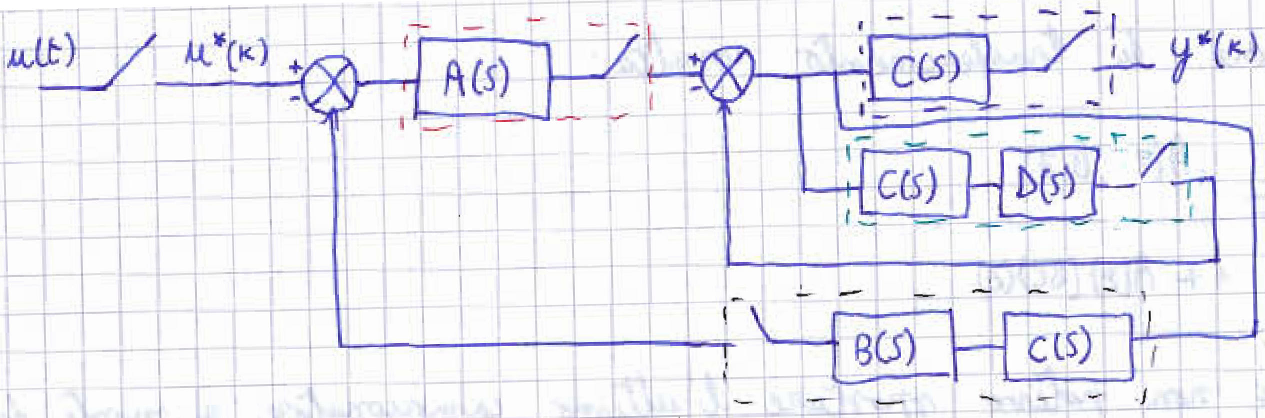
Esempio



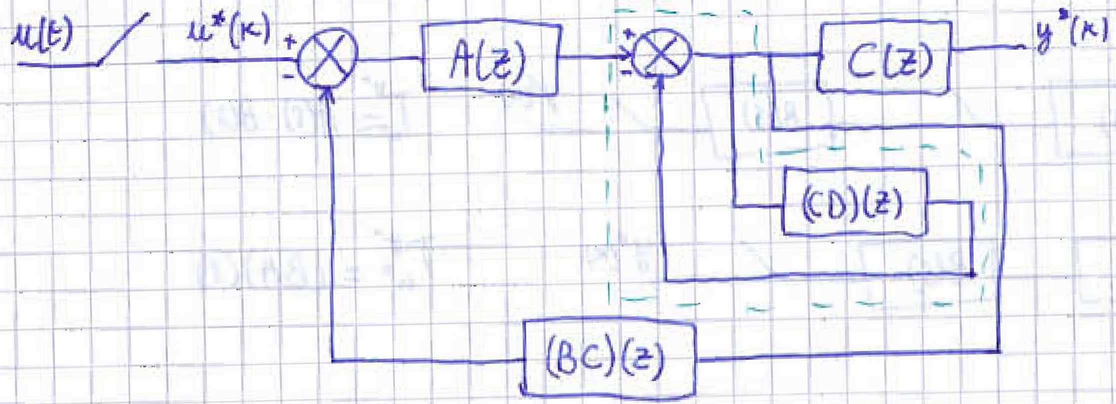
Sposto i primi due campionatori a monte dei sommatori:



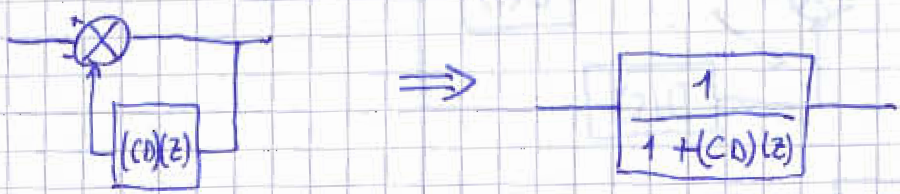
Sposto, come prima, il punto di prelevamento a monte del blocco C(s), creando 3 rami



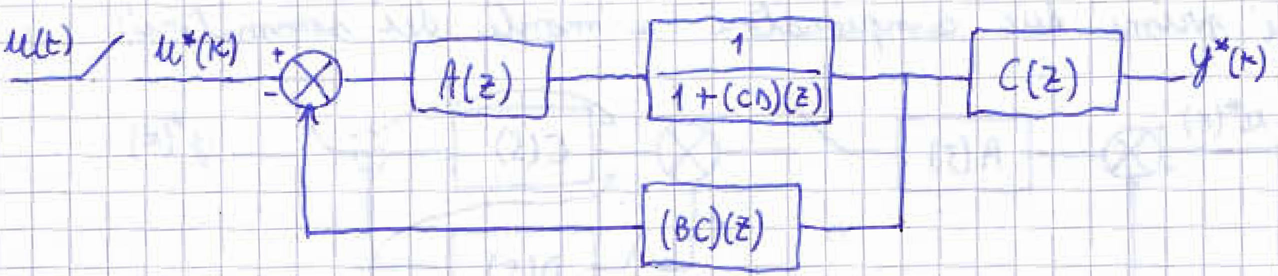
Posso ora sostituire con gli equivalenti a tempo discreto.



Risolvo prima l'anello interno:



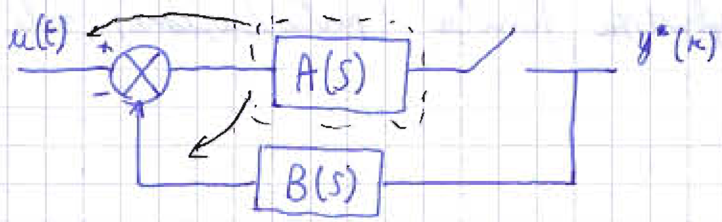
Il sistema diventa:



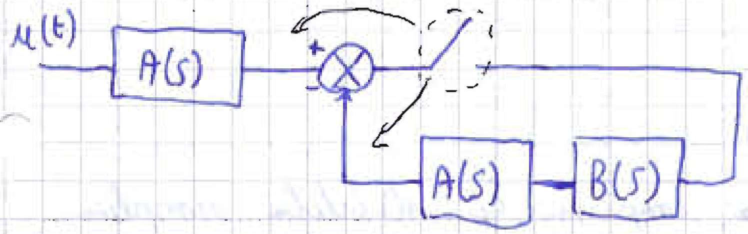
Calcolo ora la funzione di trasferimento:

$$T_{u^*}^{y^*}(z) = \frac{\dfrac{A(z)\cdot C(z)}{1+(CD)(z)}}{1+\dfrac{A(z)}{1+(CD)(z)}\cdot(BC)(z)} = \frac{A(z)\ C(z)}{1+(CD)(z)+A(z)(BC)(z)}$$

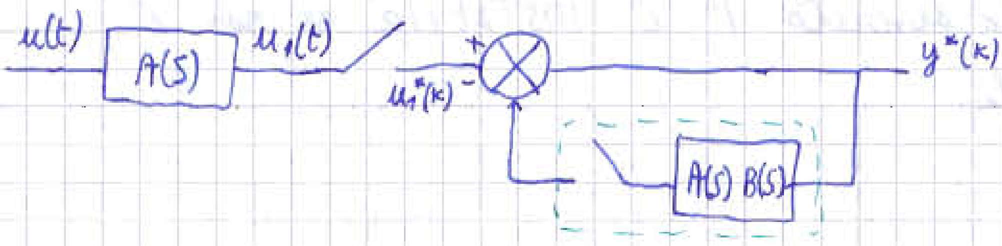
Vediamo ora un esempio di sistema che non ammette funzione di trasferimento:



Non riesco ad avere $u^*(k)$. Provo a portare $A(s)$ a monte del sommatore:



Porto ora il campionatore a monte del sommatore:



Posso calcolare la funzione di trasferimento solo se considero $u_1(t)$ come ingresso; la funzione di trasferimento $T_{u^*(t)}^{y^*(t)}$ non esiste in quanto non riesco ad ottenere $u^*(t)$.

STABILITÀ

Def.

$u(k)$ è di lunghezza finita pari a $\bar{k}$ se $u(k)=0 \ \forall k<0, \forall k>\bar{k}$.

Hanno la proprietà che $u(z) = \dfrac{p(z)}{z^{\bar{k}}}$ con $p(z)$ polinomio in z.

Def.

Un sistema a tempo discreto P è asintoticamente stabile se per qualsiasi segnale u di lunghezza finita (perturbazione) vale

$$\lim_{k \to \infty} P\{u(k)\} = 0$$

Def.

Un sistema a tempo discreto P è semplicemente stabile se per qualsiasi ingresso u di lunghezza finita $\exists\, M > 0$ tale che

$$|P\{u(k)\}| < M, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Osservo che la stabilità asintotica implica la stabilità semplice.

Def.

Un sistema a tempo discreto P è instabile se non è semplicemente stabile.

Proprietà

Un sistema a tempo discreto lineare, tempo invariante e causale con risposta all'impulso $p(k)$ è asintoticamente stabile se e solo se $\lim_{k \to \infty} p(k) = 0$

Dim.

1) Considero il sistema asintoticamente stabile e dimostro che $\lim_{k \to \infty} p(k) = 0$. $\delta(k)$ è di lunghezza finita. Se il sistema è asintoticamente stabile, $\lim_{k \to \infty} P\{\delta(k)\} = 0$ e quindi $\lim_{k \to \infty} p(k) = 0$.

2) Considero u un segnale di lunghezza finita pari a $\bar{K}$.

$$P\{u(k)\} = p(k) * u(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} p(k-i)\, u(i)$$

Noto che $u(i)=0$ se $i<0$ o $i>\bar{k}$ (ingresso di lunghezza finita).

Il limite diventa:

$$\lim_{k\to\infty} P\{u(k)\} = \sum_{i=0}^{\bar{k}} u(i) \cdot \underbrace{\lim_{k\to\infty} p(k-i)}_{=0 \text{ per ipotesi}} = 0$$

Proprietà

Sia dato un sistema a tempo discreto con funzione di trasferimento del tipo:

$$P(z) = \frac{N(z)}{(z-p_1)^{r_1}(z-p_2)^{r_2}\dots(z-p_l)^{l}}$$

dove $N(z)$ è un polinomio di grado m. $P(z)$ ha grado relativo ≥ 0.

Il sistema è asintoticamente stabile $\iff |p_i|<1 \quad \forall i=1,2,\dots,l$ ovvero i poli devono stare dentro al cerchio unitario.

Dim.

$\Leftarrow$ Per ipotesi $|p_i|<1 \quad \forall i=1,2,\dots,l$

$$p(k) = Z^{-1}\{P(z)\} = \sum_{i=1,\dots,l} Res\{P(z)z^{k-1}, p_i\}$$

$$\lim_{k\to\infty} p(k) = \sum_{i=1,\dots,l} \lim_{k\to\infty} Res\{P(z)z^{k-1}, p_i\} = 0$$ perchè $|p_i|<1$ per una proprietà già vista

Il sistema è quindi asintoticamente stabile.

$\Rightarrow$ Dimostro per assurdo: $\exists j$ tale che $|p_j|\geq 1$

$$P(z) = \frac{N(z)}{D_1(z)(z-p_j)}$$

Scrivo l'uscita usando la trasformata zeta.

Se $y(k) = P\{u(k)\}$, $Y(z) = P(z)U(z) = \dfrac{N(z)}{D_1(z)(z-p_j)} U(z)$.

Scelgo $U(z) = \dfrac{D_1(z)}{z^{n-1}}$ di lunghezza finita

Ricalcolo l'uscita con questo ingresso che mi annulla gli altri poli:

$$Y(z) = \frac{N(z)}{\cancel{D_1(z)}(z-p_j)} \cdot \frac{\cancel{D_1(z)}}{z^{n-1}} = \frac{N(z)}{z^{n-1}(z-p_j)}$$

Calcolo $y(k)$ usando l'integrale di inversione:

$$y(k) = \sum Res\left\{\frac{N(z)\, z^{k-n}}{(z-p_j)}\right\}$$ e, se $k \geq n$, $y(k) = N(p_j) \cdot p_j^{k-n}$

Si distinguono due casi:

1) $|p_j| = 1 \rightarrow |y(k)| = |N(p_j)\, p_j^{k-n}| = |N(p_j)| \neq 0$ perché p_j non è radice di $N(z)$

2) $|p_j| > 1 \rightarrow \lim_{k\to\infty} |y(k)| = \lim_{k\to\infty} |N(p_j)| \cdot |p_j|^{k-n} = +\infty$

Il che è assurdo perché genera una contraddizione $\boxtimes$

22/04/2010

Proprietà

Un sistema a tempo discreto con funzione di trasferimento di forma

$$P(z) = \frac{N(z)}{(z-p_1)^{r_1}(z-p_2)^{r_2}\dots(z-p_l)^{r_l}}$$

è semplicemente stabile $\Longleftrightarrow |p_i| \leq 1$, $\forall i = 1,2,\dots,l$ e se $|p_i| = 1$ allora $r_i =$

Non è una proprietà robusta perché se i poli sono sul bordo del cerchio unitario e ho una piccola variazione, il sistema diventa instabile.

Esempio

$$P(z) = \frac{z}{(z-0,5)^3 z^4}$$ è asintoticamente stabile (poli nel cerchio unitario)

$$P(z) = \frac{z}{(z-0,6)^2(z-1)^2}$$ è instabile perché in 1 ho un polo di ordine 2 (non semplicemente stabile).

$$P(z) = \frac{z^3}{(z-0,6)^4(z-2)}$$ è instabile

$$P(z) = \frac{3z+2}{(z^2+1)}$$ è semplicemente stabile (poli in $\pm j$)

<u>Def.</u>

Un sistema a tempo discreto P è stabile ingresso limitato - uscita limitata se vale la proprietà:
se $\exists\ M_u$ tale che $|u(k)| < M_u$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ allora $\exists\ M_y > 0$ tale che $|P\{u(k)\}| < M_y$, $\forall k \in \mathbb{Z}$

<u>Proprietà</u>

Un sistema a tempo discreto, lineare e tempo invariante è stabile ingresso limitato - uscita limitata $\iff \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |p(k)| < +\infty$ dove $p(k)$ è la risposta all'impulso del sistema.

La stabilità il-ul è più forte di quella asintotica. Cerco un controesem

$\lim_{k \to \infty} p(k) = 0$ stabilità asintotica

$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |p(k)| < +\infty$ stabilità il-ul

Cerco una funzione che converga a 0 a $+\infty$, ma che non è integrabile.
Idea: l'iperbole $\frac{1}{k}$!!! Infatti

$$P(k) = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{se } k \geq 1 \\ 0 & \text{se } k < 1 \end{cases}$$

è asintoticamente stabile perché $\lim_{k \to \infty} p(k) = 0$

non è stabile I-U perché $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |P(k)| = +\infty$

Tuttavia, nel dominio che interessa a noi (dominio di Z) non ci interessa, perché non è razionale.

Proprietà

Se $P(z)$ è una funzione di trasferimento razionale fratta, allora il sistema a tempo discreto associato è stabile I-U se e solo se è asintoticamente stabile.

Vogliamo ora cercare delle condizioni per capire la stabilità del sistema. Ci sono tre modi:

1) Uso della bilineare
2) Tabella di Jury
3) Diagrammi di Nyquist.

Def.

La trasformazione bilineare è la funzione $T: \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C}$

$$z \to w = \frac{z-1}{z+1}$$

Proprietà

$|z| < 1 \iff Re\{T(z)\} < 0$

$|z| = 1 \iff Re\{T(z)\} = 0$

$|z| > 1 \iff Re\{T(z)\} > 0$

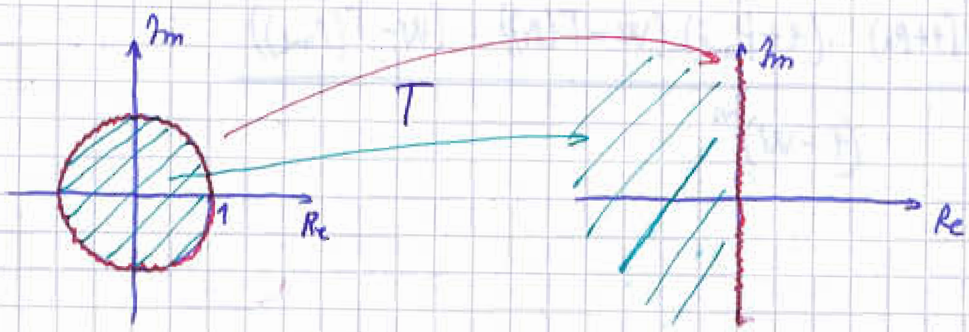
In pratica manda il cerchio nel semipiano reale negativo.

Dim. Considero $z = a + bj$

$$T(z) = \frac{z-1}{z+1} = \frac{a+bj-1}{a+bj+1} \cdot \overbrace{\frac{a+1-bj}{a+1-bj}}^{\text{RAZIONALIZZO}} = \frac{a^2-1+b^2+jb(1-a+1+a)}{(a+1)^2+b^2}$$

$$Re\{T(z)\} = \frac{a^2+b^2-1}{(a+1)^2+b^2} \qquad \text{Siccome } |z|^2 = a^2+b^2$$

Se $|z|<1 \iff a^2+b^2<1 \iff Re\{T(z)\}<0$ e così per gli altri due casi ∎



Calcolo ora T^{-1}

$$w = T(z) = \frac{z-1}{z+1} \longrightarrow w(z+1) = z-1 \rightarrow z(w-1) = -1-w$$

$$z = \frac{1+w}{1-w} = T^{-1}(w)$$

Di solito però io ho $z-p$ e quindi

$$z-p \underset{\substack{\uparrow \\ \text{applico} \\ T}}{=} \frac{1+w}{1-w} - p = \frac{1+w-p(1-w)}{1-w} = \frac{w(1+p)+1-p}{1-w} = \begin{cases} \dfrac{2}{1-w} & \text{se } p=-1 \\ \dfrac{1+p}{1-w}\left(w - \dfrac{p-1}{1+p}\right) & \text{se } p \neq - \end{cases}$$

Ma $\frac{1-p}{1+p} = T(p)$ e quindi

$$z-p = \begin{cases} \dfrac{2}{1-w} & \text{se } p=-1 \\ \dfrac{1+p}{\ldots}\left(w - T(p)\right) & \text{se } p \neq -1 \end{cases}$$

In sostanza la bilineare perde le radici (i poli) in -1 e sposta le altre radici in $T(p)$.
Vediamo cosa succede per un polinomio di grado n.

$D(z) = (z+1)^{\ell} (z-p_1)(z-p_2)\dots(z-p_{n-\ell})$ sostituisco z con $\dfrac{1+w}{1-w}$ (applico T)

$$D_w(w) = \frac{2^{\ell}}{(1-w)^{\ell}} \cdot \frac{1+p_1}{1-w}\left(w-T(p_1)\right) \dots \frac{1+p_{n-\ell}}{1-w}\left(w-T(p_{n-\ell})\right) =$$

$$= \frac{2^{\ell}\,(1+p_1)(1+p_2)\dots(1+p_{n-\ell})\,(w-T(p_1))\dots(w-T(p_{n-\ell}))}{(1-w)^{n}}$$

__Regola__

Un sistema con equazione caratteristica $D(z)=0$ è asintoticamente stabile se e solo se valgono due condizioni:

1) $D(-1) \neq 0$
2) le radici di $D_w(w) = D(T^{-1}(w))$ sono tutte a parte reale negativa

Esempio

$$P(z) = \frac{z+3}{z^3+0{,}1z^2-0{,}04z-0{,}004}$$ studiare la stabilità

$D(z) = z^3+0{,}1z^2-0{,}04z-0{,}004$

1) $D(-1) = -1+0{,}1+0{,}04-0{,}004 \neq 0$ ✓

$$D_w(w) = D(z)\Big|_{z=\frac{1+w}{1-w}} = \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^3 + 0{,}1\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2 - 0{,}04\left(\frac{1+w}{1-w}\right) - 0{,}004 =$$

$$= \frac{(1+w)^3+0{,}1(1+w)^2(1-w)-0{,}04(1+w)(1-w)^2-0{,}004(1-w)^3}{(1-w)^3} =$$

$= \underset{\text{passaggi}}{\text{dopo } n} = \dfrac{0,864\,W^3 + 2,928\,W^2 + 3,152\,W + 1,056}{(1-W)^3}$

Uso il criterio di Routh per stabilire la stabilità del sistema. Ricordo, comunque, che se ci fosse stato un segno diverso dagli altri, avrei detto subito che il sistema è instabile.

$$\begin{array}{c|cc} & 0,864 & 3,152 \\ & 2,928 & 1,056 \\ P & \alpha & 0 \\ P & 1,056 & \end{array} \qquad \alpha = \frac{2,928 \cdot 3,152 - 0,864 \cdot 1,056}{2,928} = 2,8404$$

Il sistema è asintoticamente stabile perché ho solo permanenze di segno.

Vediamo ora il criterio di Jury.
So che, a tempo continuo, i coefficienti devono avere necessariamente lo stesso segno e se $n=2$ la condizione è anche sufficiente.

<u>Proprietà</u>

Il polinomio $D(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$ ha tutte le radici all'interno del cerchio unitario solo se (condizione necessaria):

1) $a_n > |a_0| > 0$
2) $D(1) > 0$
3) $D(-1) \begin{cases} >0 & \text{se } n \text{ pari} \\ <0 & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$

<u>Dim.</u> Considero $n=3$ e $D(z) = (z-p)(z-(a+bj))(z-(a-bj))$ e $\begin{cases} |p|<1 \\ |a+bj|<1 \end{cases}$

1) $a_n = a_3 = 1$

$|a_0| = \underbrace{|-p|}_{<1}\underbrace{|a+bj|}_{<1}\underbrace{|a-bj|}_{<1} < 1$ ✓
per ipotesi

2) $D(1) = (1-p)\left(1-(a+bj)\right)\left(1-(a-bj)\right) = \underbrace{(1-p)}_{>0}\underbrace{\left((1-a)^2+b^2\right)}_{>0} > 0$ ✓

>0 perché $|p|<1$ per ipotesi

>0 perché somma di quadrati

3) $D(-1) = (-1-p)\left(-1-(a+bj)\right)\left(-1-(a-bj)\right) = \underbrace{(-1-p)}_{<0}\underbrace{\left((-1-a)^2+b^2\right)}_{>0} < 0$ ✓ ∎

<0 perché $|p|<1$

<u>Proprietà</u>

Le 3 condizioni necessarie viste sopra sono anche sufficienti se $n=2$.

$D(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0$, $a_2 > 0$

1) $a_2 > |a_0|$

2) $D(1) > 0 \rightarrow a_2 + a_1 + a_0 > 0$

3) $D(-1) > 0 \rightarrow a_2 - a_1 + a_0 > 0$

<u>Dim.</u> Ipotizzo che $D(z)$ non abbia radici in -1 e applico la trasformazione bilineare $z = \frac{1+w}{1-w}$

$$D_w(w) = a_2\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2 + a_1\left(\frac{1+w}{1-w}\right) + a_0 = \frac{a_2(1+w)^2 + a_1(1+w)(1-w) + a_0(1-w)^2}{(1-w)^2} =$$

$$= \frac{w^2\overbrace{(a_2-a_1+a_0)}^{>0 \text{ ③}} + w\overbrace{(2a_2-2a_0)}^{>0 \text{ ①}} + \overbrace{a_2+a_1+a_0}^{>0 \text{ ②}}}{(1-w)^2}$$

Usando poi la regola di Cartesio, stabilisco che il sistema è stabile

Esercizi 29/04/2010

Dire se i sistemi sono stabili:

- $P(z) = \dfrac{z}{z^2+0{,}2z-0{,}08}$ $\quad D(z) = z^2+0{,}2z-0{,}08$ di grado 2 $\Rightarrow$ le condiz. sono necessarie e sufficienti

1) $1 > |-0{,}08|$? ok

2) $D(1)>0$? $1+0{,}2-0{,}08 = 1{,}12>0$ ok

3) $D(-1)>0$? $1-0{,}2-0{,}08 = 0{,}72>0$ ok

$\Rightarrow$ asintoticamente stabile

- $P(z) = \dfrac{z+3}{z^3-2z^2-0{,}01z+0{,}02}$

1) $1 > |0{,}02|$? ok

2) $D(1)>0$? $D(1) = 1-2-0{,}01+0{,}02 = -0{,}99<0 \rightarrow$ sistema instabile

- $P(z) = \dfrac{3z}{z^4+0{,}1z^3+0{,}11z^2+0{,}001z-0{,}0006}$

1) $1 > |-0{,}0006|$? ok

2) $D(1)>0$? $1+0{,}1+0{,}11+0{,}001-0{,}0006>0$ ok

3) $D(-1)>0$? $1-0{,}1+0{,}11-0{,}001-0{,}0006>0$ ok

Le tre condizioni sono verificate, ma sono solo necessarie...

CRITERIO DI JURY

Consideriamo un sistema a tempo discreto con equazione caratteristica

$D(z) = a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n$ con $n>2$

Costruiamo la Tabella di Jury

	z^0	z^1	z^2	z^3	$\dots$	z^n
1	a_0	a_1	a_2	a_3	$\dots$	a_n
2	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	$\dots$	a_0
3	b_0	b_1	b_2	$\dots$	b_{n-1}	
4	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\dots$	b_0	
5	$\vdots$					
$(n-2)2+1$	q_0	q_1	q_2			

La tabella di Jury si costruisce con queste regole:

1) la prima riga contiene i coefficienti di $D(z)$ per potenze di z crescenti;

2) ogni riga di ordine pari è uguale alla riga dispari precedente con ordine inverso;

3) la terza riga ha $n-1$ elementi

$$b_0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_n \\ a_n & a_0 \end{vmatrix} \qquad b_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-1} \\ a_n & a_1 \end{vmatrix} \qquad b_i = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-i} \\ a_n & a_i \end{vmatrix}$$

4) ogni riga dispari si calcola a partire dalle due righe precedenti

Questo procedimento si ferma quando arrivo ad avere solo 3 elementi, esattamente alla riga $(n-2)\cdot 2+1$.

Il sistema è asintoticamente stabile se e solo se:

1) $a_n > |a_0|$

2) $D(1) > 0$

3) $D(-1) > 0$ se n pari o $D(-1) < 0$ se n dispari

4) $|b_0| > |b_{n-1}|$, $|c_0| > |c_{n-2}|$, $\dots$, $|q_0| > |q_2|$

Posso ora stabilire se il sistema lasciato in sospeso, per cui valevano le condizioni necessarie, è stabile. Costruisco la tabella di Jury:

$n = 4 \Rightarrow$ 5 righe

	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4
1	-0,0006	0,001	0,11	0,1	1
2	1	0,1	0,11	0,001	-0,0006
3	-1	-0,1	-0,1101	-0,00106	
4	-0,00106	-0,1101	-0,1	-1	
5	1	⊛	0,109		

$$b_0 = \begin{vmatrix} -0{,}0006 & 1 \\ 1 & -0{,}0006 \end{vmatrix} \simeq -1 \qquad b_1 = \begin{vmatrix} -0{,}0006 & 0{,}1 \\ 1 & 0{,}001 \end{vmatrix} \simeq -0{,}1$$

$$b_2 = \begin{vmatrix} -0{,}0006 & 0{,}11 \\ 1 & 0{,}11 \end{vmatrix} \simeq -0{,}1101 \qquad b_3 = \begin{vmatrix} -0{,}0006 & 0{,}001 \\ 1 & 0{,}1 \end{vmatrix} \simeq -0{,}00106$$

$$c_0 = \begin{vmatrix} -1 & -0{,}00106 \\ -0{,}00106 & -1 \end{vmatrix} \simeq +1 \qquad c_1 = ⊛ \text{ non mi servirà}$$

$$c_2 = \begin{vmatrix} -1 & -0{,}1 \\ -0{,}00106 & -0{,}1101 \end{vmatrix} = 0{,}109$$

Verifico ora la quarta condizione del criterio di Jury:

$|b_0| > |b_3| \rightarrow |-1| > |-0{,}00106|$ SI

$|c_0| > |c_2| \rightarrow |1| > |0{,}109|$ SI

Pertanto, il sistema è asintoticamente stabile.

Vediamo un altro esercizio.

$$P(z) = \frac{z}{z^4 - 1{,}2z^3 + 0{,}07z^2 + 0{,}3z - 0{,}08}$$

Verifico le tre condizioni necessarie:

1) $|1| > |-0{,}08|$? SI
2) $D(1) > 0$? $1 - 1{,}2 + 0{,}07 + 0{,}3 - 0{,}08 = 0{,}09$ SI
3) $D(-1) > 0$? $1 + 1{,}2 + 0{,}07 - 0{,}3 - 0{,}08 = 1{,}89$ SI

Posso quindi costruire la tabella di Jury: $n=4 \rightarrow 5$ righe

	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4
1	-0,08	0,3	0,07	-1,2	1
2	1	-1,2	0,07	0,3	-0,08
3	-0,9936	1,176	-0,0756	-0,204	
4	-0,204	-0,0756	1,176	-0,9936	
5	0,9456	⊛	0,315		

$$b_0 = \begin{vmatrix} -0{,}08 & 1 \\ 1 & -0{,}08 \end{vmatrix} = -0{,}9936 \qquad b_1 = \begin{vmatrix} -0{,}08 & -1{,}2 \\ 1 & 0{,}3 \end{vmatrix} = 1{,}176$$

$$b_2 = \begin{vmatrix} -0{,}08 & 0{,}07 \\ 1 & 0{,}07 \end{vmatrix} = -0{,}0756 \qquad b_3 = \begin{vmatrix} -0{,}08 & 0{,}3 \\ 1 & -1{,}2 \end{vmatrix} = -0{,}204$$

$$c_0 = \begin{vmatrix} -0{,}9936 & -0{,}204 \\ -0{,}204 & -0{,}9936 \end{vmatrix} = 0{,}9456 \qquad c_2 = \begin{vmatrix} -0{,}9936 & 1{,}176 \\ -0{,}204 & -0{,}0756 \end{vmatrix} = 0{,}315$$

Verifico la quarta condizione:

$|b_0| > |b_3| \rightarrow |-0{,}9936| > |-0{,}204|$ SI

$|c_0| > |c_2| \rightarrow |0{,}9456| > |0{,}315|$ SI

Il sistema è asintoticamente stabile

MODI DEI SISTEMI A TEMPO DISCRETO

Consideriamo un sistema a tempo continuo

$$P(s) = \frac{s}{s^2 (s+3)^3}$$

So già che $p(t) \in \text{lin}\{\overbrace{1, t, e^{-3t}, te^{-3t}, t^2 e^{-3t}}^{\text{modi del sistema}}\}$

il tempo discreto le cose sono molto simili:

<u>Proprietà</u>

Dato un sistema a tempo discreto con funzione di trasferimento

$$P(z) = \frac{N(z)}{z^{r_0} (z-p_1)^{r_1} \dots (z-p_\ell)^{r_\ell}}$$

allora per $k > 0$

$$p(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{P(z)\} \in \text{lin}\{\overbrace{p_1^k, kp_1^k, \dots, k^{r_1-1} \cdot p_1^k}^{\text{modi di } p_1}, \overbrace{p_2^k, kp_2^k, \dots, k^{r_2-1} \cdot p_2^k}^{\text{modi di } p_2}, \dots, p_\ell^k,$$
$$kp_\ell^k, \dots, k^{r_\ell-1} p_\ell^k, \underbrace{\delta(k-1), \delta(k-2), \dots, \delta(k-r_0)}_{\text{modi di tipo "deadbeat"}}\}$$

I modi deadbeat si annullano in un numero finito di passi.

<u>Dim.</u> nel caso $\ell = 3$, $r_0 = 3$, $r_1 = 1$, $r_2 = 3$

$$P(z) = \frac{N(z)}{z^3 (z-p_1)(z-p_2)^3} \qquad \text{faccio lo sviluppo in fratti semplici}$$

$$P(z) = C_0 + \frac{C_{1,1}}{z} + \frac{C_{1,2}}{z^2} + \frac{C_{1,3}}{z^3} + \frac{C_{2,1}}{z-p_1} + \frac{C_{3,1}}{z-p_2} + \frac{C_{3,2}}{(z-p_2)^2} + \frac{C_{3,3}}{(z-p_2)^3}$$

Ricordando la formula per antitrasformare i fratti semplici:

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{(z-p)^n}\right\} = \frac{(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)\cdot p^{k-n}\cdot 1(k-1)}{(n-1)!} = \underbrace{P_{n-1}(k)}_{\text{Polinomio di grado } n-1}\cdot p^k \cdot 1(k-1)$$

Calcolo $p(k)$:

$$p(k) = C_0\,\delta(k) + C_{1,1}\,\delta(k-1) + C_{1,2}\,\delta(k-2) + C_{1,3}\,\delta(k-3) + C_{2,1}\cdot p_1^k\, 1(k-1) + C_{3,1}\cdot p_2^k\, 1(k-1)$$
$$+ C_{3,2}\underbrace{\ell_1(k)}_{\text{polinomio di grado 1}}\cdot p_2^k \cdot 1(k-1) + C_{3,3}\underbrace{\ell_2(k)}_{\text{polinomio di grado 2}}\, p_2^k\, 1(k-1)$$

Se $k>0$ avrò:

$$p(k) \in \mathrm{lin}\left\{\delta(k-1),\ \delta(k-2),\ \delta(k-3),\ p_1^k,\ p_2^k,\ k p_2^k,\ k^2 p_2^k\right\} \quad \blacksquare$$

Esempio

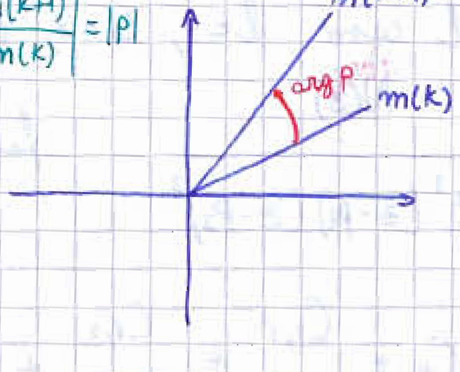
$$P(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-0{,}5)(z-2)^2} \qquad \text{modi} = \left\{1,\ 0{,}5^k,\ 2^k,\ k2^k\right\}$$

Consideriamo il modo $m(k) = p^k$ associato al termine 1.

$$m(k) = \left[|p|\cdot e^{j\arg p}\right]^k = \underbrace{|p|^k}_{\text{MODULO}}\, e^{\underbrace{j(\arg p)\cdot k}_{\text{FASE}}}$$

Valgono questi tre casi:

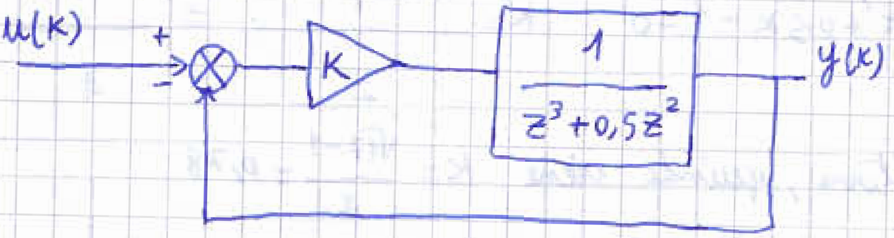
$$\left|\frac{m(k+1)}{m(k)}\right| = |p|$$



- se $|p|<1$, $\lim_{k\to+\infty} m(k) = 0$
- se $|p|>1$, $\lim_{k\to+\infty} |m(k)| = +\infty$

Esercizio

Sia dato un sistema rappresentato in figura:



Stabilire per quali valori di $K \in \mathbb{R}$ il sistema è stabile.

Per prima cosa trovo la funzione di trasferimento:

$$T_u^y(z) = \frac{\dfrac{K}{z^3+0{,}5z^2}}{1+\dfrac{K}{z^3+0{,}5z^2}} = \frac{K}{K+z^3+0{,}5z^2}$$

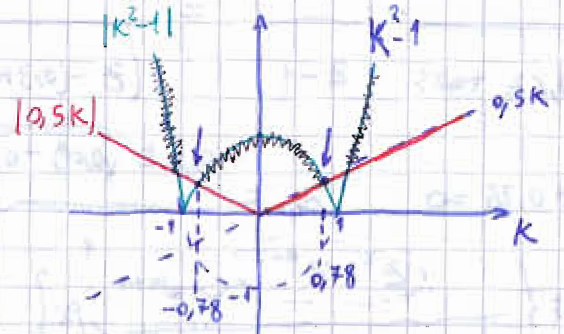
Quindi $D(z) = z^3+0{,}5z^2+K$ di grado 3. Elenco le condizioni:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ 1>|K| \rightarrow -1<K<1 \\ 2)\ D(1)>0 \rightarrow 1+0{,}5+K>0 \rightarrow K>-1{,}5 \\ 3)\ D(-1)<0 \rightarrow -1+0{,}5+K<0 \rightarrow K<0{,}5 \end{array}\right\} -1<K<0{,}5$$

	z^0	z^1	z^2	z^3
1	K	0	0,5	1
2	1	0,5	0	K
3	K^2-1	$\circledast$	$0{,}5K$	

4) $|K^2-1| > |0{,}5K|$

Risolvo per via grafica



non la condizione è verificata

Devo trovare le due intersezioni ↓, che saranno una l'opposta dell'altra. Calcolo quella positiva:

$$0{,}5K = -(K^2-1) \qquad K^2+0{,}5K-1=0 \qquad K=\frac{-0{,}5\pm\sqrt{0{,}25+4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$$

Scarto la soluzione negativa, quindi viene $K=\frac{\sqrt{17}-1}{4}=0{,}78$

Mettendo a sistema $-0{,}78<K<0{,}78$ con le condizioni precedenti:

$$\begin{cases}-1<K<0{,}5\\ -0{,}78<K<0{,}78\end{cases} \Longrightarrow \boxed{-0{,}78<K<0{,}5}$$

ESERCIZI

05/05/2010

$$y(K)=0{,}6\,y(K-1)-0{,}25\,y(K-2)+u(K-1)$$

1) Trovare la funzione di trasferimento
2) Trovare l'uscita se $u(K)=1(K)$

1) Faccio la trasformata zeta:

$$Y(z)=0{,}6\,z^{-1}Y(z)-0{,}25\,z^{-2}Y(z)+z^{-1}U(z)$$

$$Y(z)=\frac{z^{-1}}{1-0{,}6z^{-1}+0{,}25z^{-2}}U(z)=\underbrace{\frac{z}{z^2-0{,}6z+0{,}25}}_{T(z)}U(z)$$

2) $Y(z)=T(z)\,U(z)=$

$$=\frac{z}{z^2-0{,}6z+0{,}25}\cdot\frac{z}{z-1}=\frac{z^2}{(z-(0{,}3+0{,}4j))(z-(0{,}3-0{,}4j))(z-1)}$$

$$z^2-0{,}6z+0{,}25=0 \qquad z_{1,2}=\frac{0{,}3\pm\sqrt{0{,}09-0{,}25}}{1}=0{,}3\pm\sqrt{-0{,}16}=0{,}3\pm j0{,}4$$

$$y(K)=\sum_{p_i}Res\left\{\frac{\overbrace{z^2\cdot z^{K-1}}^{z^{K+1}}}{(z-(0{,}3+0{,}4j))(z-(0{,}3-0{,}4j))(z-1)},p_i\right\}$$

non ci sono casi particolari

$$\mathrm{Res}\left\{G(z),1\right\} = \left.\frac{z^{k+1}\ \cancel{(z-1)}}{(z^2-0{,}6z+0{,}25)\cancel{(z-1)}}\right|_{z=1} = \frac{1}{1-0{,}6+0{,}25} = \frac{1}{0{,}65}$$

$$\mathrm{Res}\left\{G(z);\,0{,}3+0{,}4j\right\} + \mathrm{Res}\left\{G(z);\,0{,}3-0{,}4j\right\} = 2\,\mathrm{Re}\left\{\mathrm{Res}\left\{G(z);\,0{,}3+0{,}4j\right\}\right\}$$

$$\mathrm{Res}\left\{G(z);\,0{,}3+0{,}4j\right\} = \left.\frac{z^{k+1}\ \cancel{(z-(0{,}3+0{,}4j))}}{\cancel{(z-(0{,}3+0{,}4j))}(z-(0{,}3-0{,}4j))(z-1)}\right|_{z=0{,}3+0{,}4j} =$$

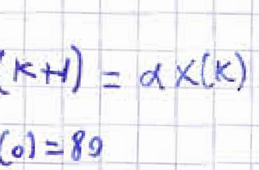
$$= \frac{(0{,}3+0{,}4j)^{k+1}}{0{,}8j\,(0{,}3+0{,}4j-1)} = \frac{0{,}5^{k+1}}{\underbrace{0{,}8\sqrt{0{,}65}}_{\text{modulo}}}\cdot e^{j\underbrace{\left[(\mathrm{atan}\,\frac{4}{3})(k+1)-\frac{\pi}{2}-(\pi-\mathrm{atan}(\frac{4}{7}))\right]}_{\text{fase}}}$$

Quindi; $2\,\mathrm{Re}\left\{\mathrm{Res}\left\{G(z),0{,}3+0{,}4j\right\}\right\} = 2\cdot\dfrac{0{,}5^{k+1}}{0{,}8\sqrt{0{,}65}}\cdot\cos\left(\left(\mathrm{arctan}\frac{4}{3}\right)(k+1)-\frac{3}{2}\pi+\mathrm{atan}\frac{4}{7}\right) =$

$$= 1{,}55\,(0{,}5)^{k+1}\cos(0{,}927k-3{,}265)$$

$x(k) = \sum \mathrm{Res}\ldots$

Esercizio



$T_a = 50°$

$x(0) = 80°$

$[x(k+1)-T_a] = \alpha(x(k)-T_a)$

$x(20) = 70°$

$\alpha = ?$

$x(10) = ?$

$$\begin{cases} x(k+1) = \alpha x(k) + (1-\alpha)T_a \\ x(0) = 80 \end{cases}$$

Faccio la trasformata:

!!! RICORDARE !!!

$$\begin{cases} zX(z) - zX(0) = \alpha X(z) + (1-\alpha)T_a\cdot\boxed{\dfrac{z}{z-1}} \\ X(0) = 80 \end{cases}$$

$$X(z) = \left(z\,X(0) + \frac{(1-\alpha)\,T_a\,z}{z-1} \right) \cdot \frac{1}{z-\alpha} = \frac{z(z-1)X(0) + (1-\alpha)T_a z}{(z-1)(z-\alpha)}$$ antitrasformo

$$x(k) = \sum \text{Res} \left\{ \underbrace{\frac{[(z-1)X(0) + (1-\alpha)T_a]\, z^{k-1+1}}{(z-1)(z-\alpha)}}_{G(z)} \right\}$$

$$\text{Res}\{G(z),1\} = \frac{[(z-1)X(0) + (1-\alpha)T_a]\, z^{k}}{\cancel{(z-1)}(z-\alpha)} \cancel{(z-1)} \Bigg|_{z=1} = T_a$$

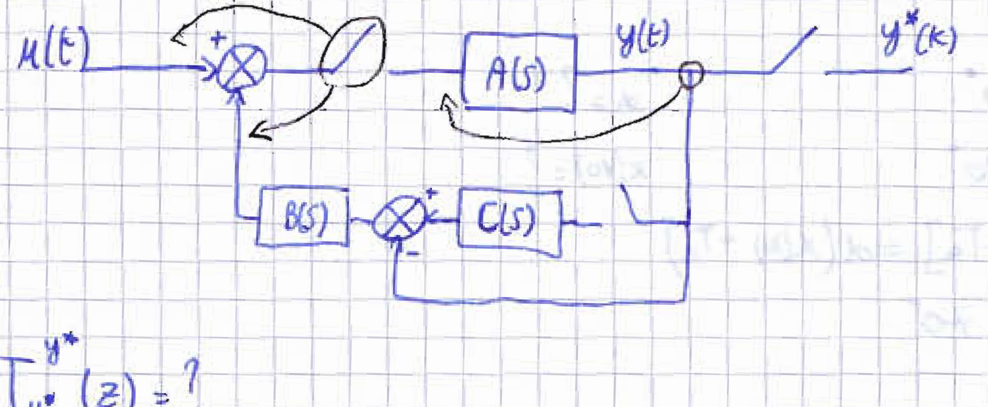
$$\text{Res}\{G(z),\alpha\} = \frac{[(z-1)X(0) + (1-\alpha)T_a]\, z^{k}}{(z-1)\cancel{(z-\alpha)}} \cancel{(z-\alpha)} \Bigg|_{z=\alpha} = (X(0) - T_a)\,\alpha^k$$

$$\begin{cases} x(k) = T_a + (x(0) - T_a)\,\alpha^k \\ x(20) = 70 \end{cases} \Rightarrow 70 = 50 + (80-50)\,\alpha^{20} \qquad \alpha^{20} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

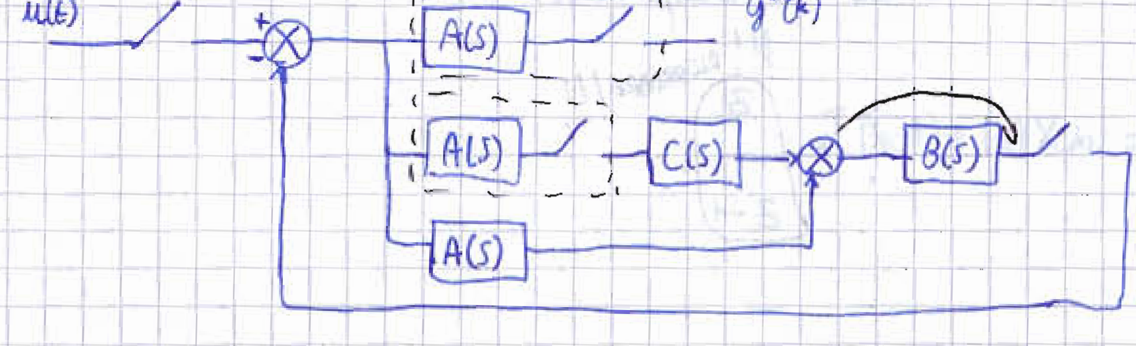
$$\alpha = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/20} = 0{,}9799$$

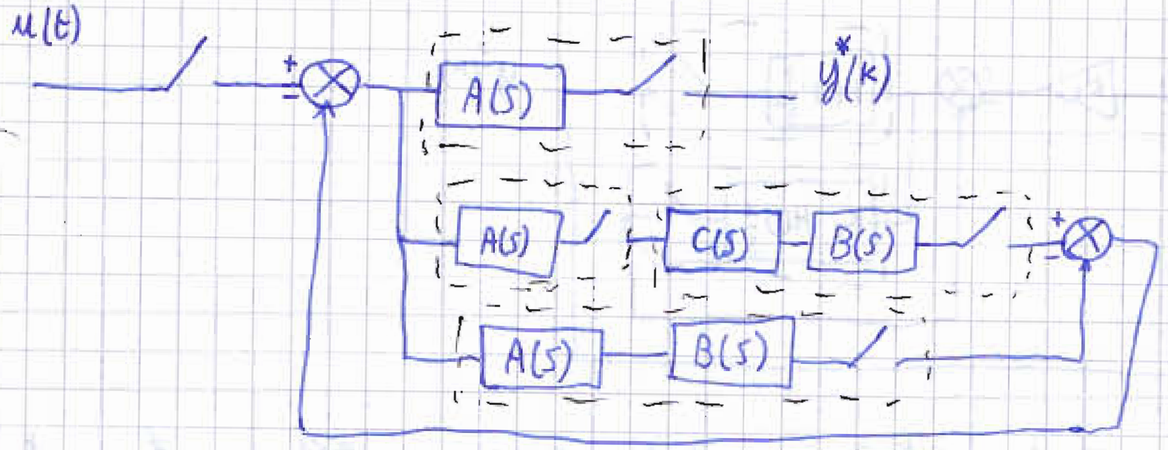
$$x(10) = 50 + (80-50)\; 0{,}9799^{10} = 74{,}49$$

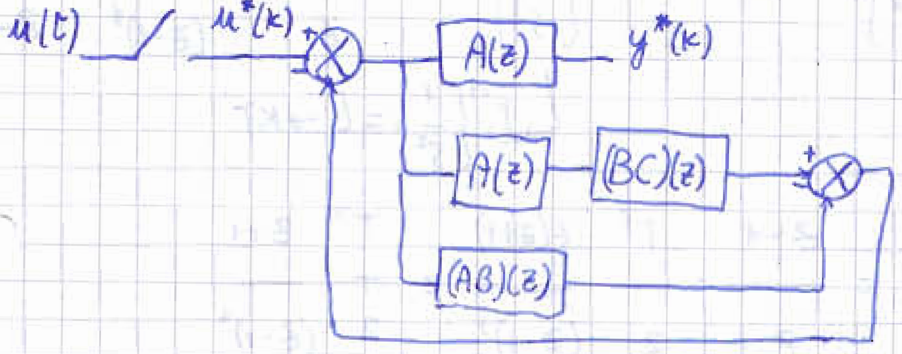
Esercizio



$$T_{u^*}^{y^*}(z) = ?$$

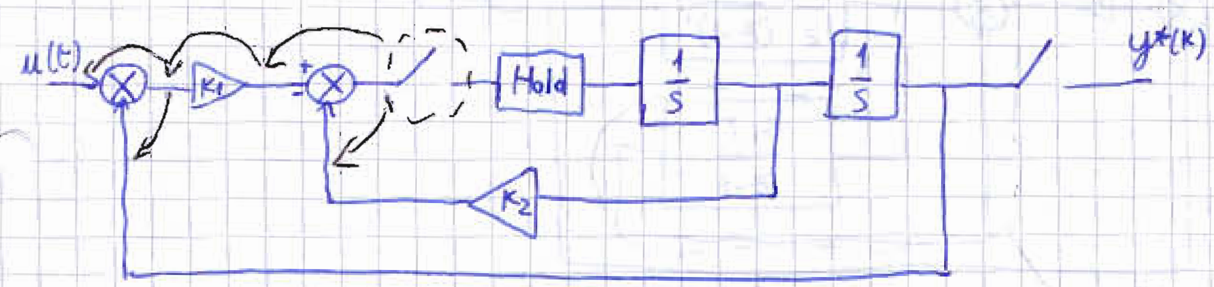


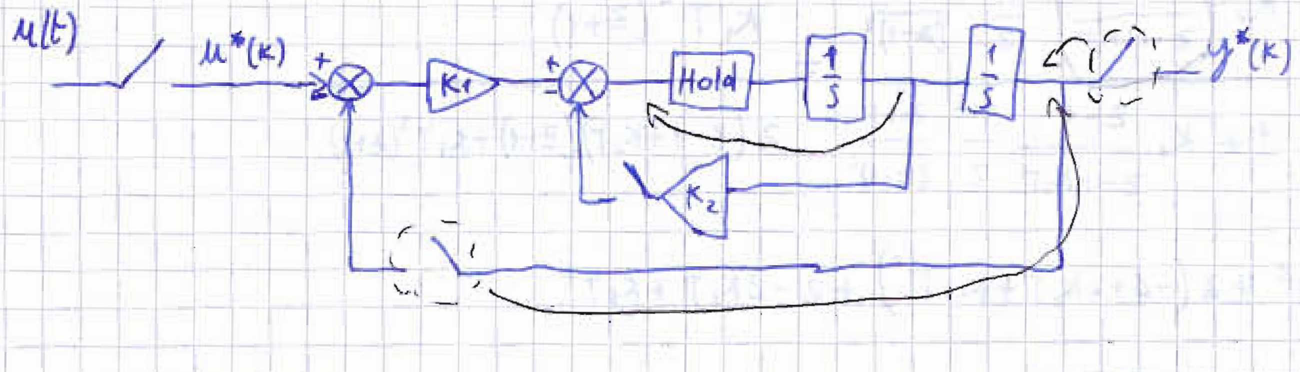


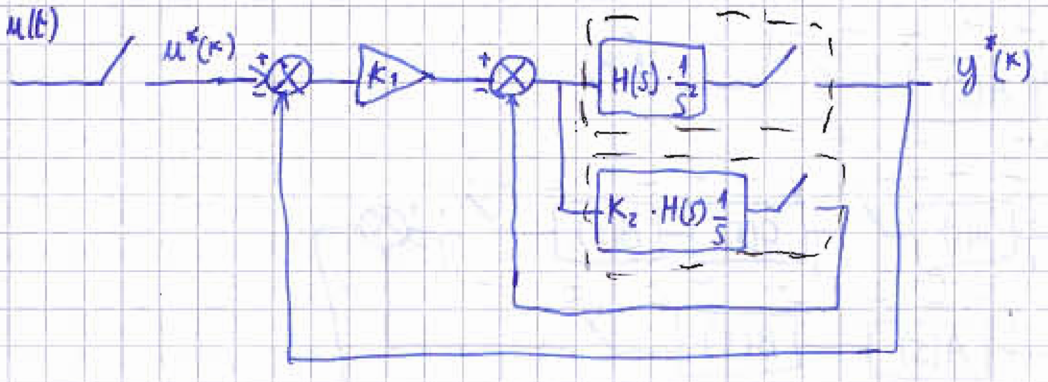


$$T_{u^*}^{y^*}(z) = \frac{A(z)}{1 + A(z)(BC)(z) - (AB)(z)}$$

Esercizio







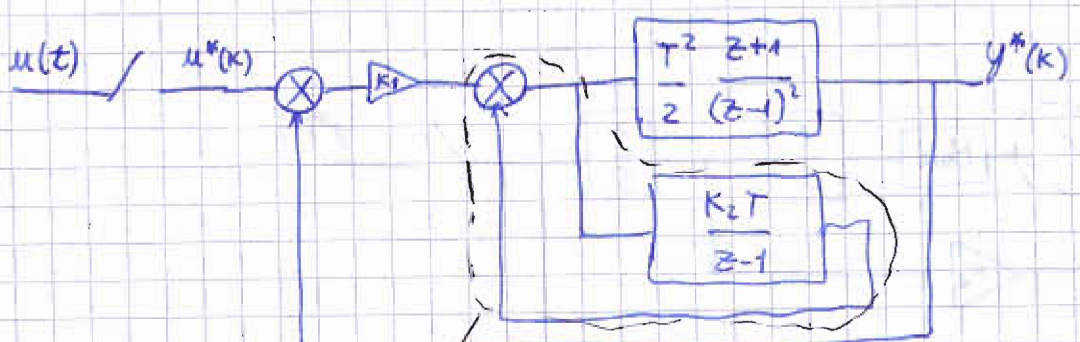
$$Z\left\{H(s)\cdot\frac{K_2}{s}\right\} = \frac{z-1}{z}\,Z\left\{\frac{K_2}{s^2}\right\} = K_2\cdot\frac{z-1}{z}\,Z\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = K_2\,\frac{\cancel{z-1}}{\cancel{z}}\cdot T\,\frac{\cancel{z}}{(z-1)^{2}} = \frac{K_2 T}{z-1}$$

$$\hookrightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t \to kT$$

$$Z\left\{H(s)\cdot\frac{1}{s^2}\right\} = \frac{z-1}{z}\cdot Z\left\{\frac{1}{s^3}\right\} = \frac{z-1}{z}\cdot\frac{T^2}{2}\,\frac{z(z+1)}{(z-1)^3} = \frac{T^2}{2}\,\frac{z+1}{(z-1)^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} = \frac{t^2}{2} \xrightarrow[t=kT]{} \frac{T^2k^2}{2}$$

$$Z\{k^2\} = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$



$$T_{u^*}^{y^*}(z) = \frac{K_1\cdot\frac{z-1}{z-1+K_2T}\cdot\frac{T^2}{2}\,\frac{z+1}{(z-1)^2}}{1+K_1\,\frac{z-1}{z-1+K_2T}\cdot\frac{T^2}{2}\,\frac{z+1}{(z-1)^2}} = \frac{K_1T^2(z+1)}{2(z-1+K_2T)(z-1)+K_1T^2(z+1)}$$

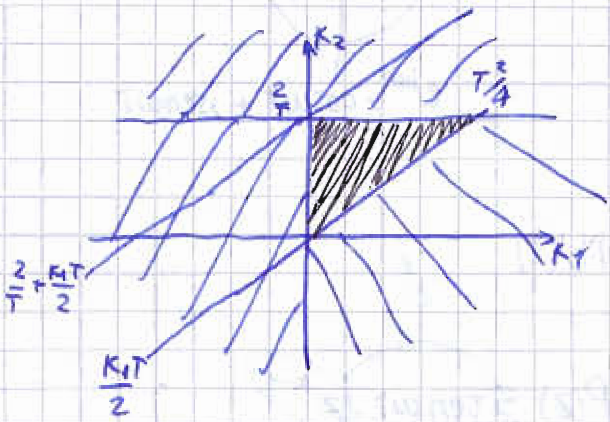
$$D(z) = 2z^2 + z(-4+2K_2T+K_1T^2) + 2 - 2K_2T + K_1T^2$$

Condizioni di stabilità:

1) $2 > |2-2K_2T+K_1T^2|$ $\quad -2 < 2-2K_2T+K_1T^2 < 2$ $\quad K_2 < \frac{2}{T}+\frac{K_1T}{2}$ $\quad K_2 > \frac{K_1T}{2}$

2) $\cancel{2}-\cancel{A}+\cancel{2}K_2T+K_1T^2+\cancel{2}-3K_2T+K_1T^2>0 \quad 2K_1T^2>0 \quad K_1>0$

3) $D(-1)>0 \quad 2+\cancel{4}-2K_2T-\cancel{K_1}T^2+2-2K_2T+\cancel{K_1}T^2>0 \quad -4K_2T+8>0 \quad K_2<\frac{2}{T}$



Esercizio

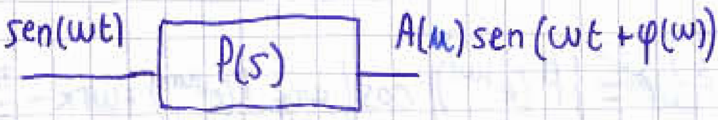
Ho un sistema di cui mi viene data la legge e devo trovare la funzione di trasferimento:

$$MD^2x = u - BDx \longrightarrow Ms^2X(s) = U(s) - BsX(s) \rightsquigarrow X(s) = \frac{1}{Ms^2+Bs}U(s)$$

II PARTE

12/05/2010

ANALISI IN FREQUENZA



Il teorema di risposta armonica per i sistemi continui dice che

$$A(\omega)\, e^{j\varphi(\omega)} = P(j\omega)$$

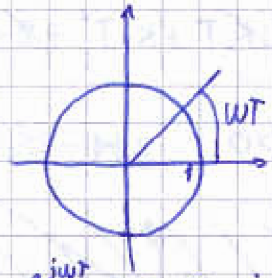
Teorema di risposta armonica per sistemi a tempo discreto

Un sistema a tempo discreto con funzione di trasferimento $P(z)$, asintoticamente stabile, con in ingresso il segnale $u(k) = \text{sen}(\omega T k)$

presenta in uscita, a regime, il segnale

$y(k) = A(u)\, sen(\omega T k + \varphi(u))$

dove $A(u)\, e^{j\varphi(u)} = P(e^{j\omega T})$



$e^{j\omega T} = \cos\omega T + j sen\omega T$

Dim.

$$U(z) = \frac{z\, sen\omega T}{z^2 - 2z\cos\omega T + 1} = \frac{z\, sen\omega T}{(z-e^{j\omega T})(z-e^{-j\omega T})} = P(z)U(z)$$

$$y(k) = \sum_{\substack{P_i \in \\ \text{poli di} \\ P(z)U(z)z^{k-1}}} Res\{P(z)U(z)z^{k-1}, P_i\} = \sum_{\substack{P_i \in \\ \text{poli di} \\ P(z) \cup U\{e^{j\omega T}, e^{j\omega T}\}}} Res\left\{\frac{P(z)\cdot z\, sen\omega T \cdot z^{k-1}}{(z-e^{j\omega T})(z-e^{-j\omega T})}, P_i\right\} =$$

z^k

$$= \underbrace{\sum_{\substack{P_i \in \\ \text{poli} \\ \text{di } P(z)}} Res\left\{\frac{P(z)\, sen\omega T\, z^k}{(z-e^{-j\omega T})(z-e^{j\omega T})}\right\}}_{\to 0 \text{ se } k \to \infty, \text{ quindi non lo considero ???}} + 2Re\left\{\frac{P(z)\, sen\omega T\, z^k\, \cancel{(z-e^{j\omega T})}}{\cancel{(z-e^{j\omega T})}(z-e^{-j\omega T})}\bigg|_{z=e^{j\omega T}}\right\} =$$

$$= \cancel{2}Re\left\{\frac{P(e^{j\omega T})\, sen\cancel{\omega T}\, e^{j\omega T k}}{\underbrace{(e^{j\omega T} - e^{-j\omega T})\cdot\frac{\cancel{2}j}{2j}}_{sen\cancel{\omega T}}}\right\} = Re\left\{\frac{P(e^{j\omega T})\, e^{j\omega T k}}{j}\right\} =$$

$$= Re\left\{|P(e^{j\omega T})|\, e^{j(\arg P(e^{j\omega T}) + \omega T k - \frac{\pi}{2})}\right\} = |P(e^{j\omega T})| \cos\left(\arg P(e^{j\omega T}) + \omega T k - \frac{\pi}{2}\right)$$

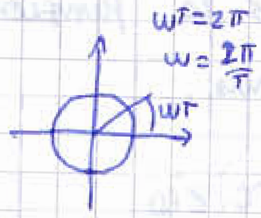
$$= |P(e^{j\omega T})|\, sen(\arg P(e^{j\omega T}) + \omega T k) \qquad \square$$

Definizione di Funzione di risposta armonica

Per un sistema a tempo discreto con funzione di trasferimento $P(z)$, la funzione di risposta armonica è data da $F(\omega) = P(e^{j\omega T})$

Proprietà

① È periodica in ω con periodo $\frac{2\pi}{T}$



Dim. $P\left(e^{j(\omega + K\frac{2\pi}{T})T}\right) = P\left(\cos(\omega T + K2\pi) + j\,sen(\omega T + K2\pi)\right) =$

$= P\left(\cos(\omega T) + j\,sen(\omega T)\right) = P\left(e^{j\omega T}\right)$ ▫

② $F(-\omega) = F(\omega)^*$

Dim. $F(-\omega) = P\left(e^{-j\omega T}\right) = \left[P\left(e^{j\omega T}\right)\right]^* = F(\omega)^*$

③ Relazione tra funzione di risposta armonica di un sistema a tempo continuo e del suo equivalente a tempo discreto

Se $P(s)$ è la funzione di trasferimento di un sistema a tempo continuo e $P_d(z) = \mathcal{Z}\{P(s)\}$ è il suo equivalente a tempo discreto

$$P_d\left(e^{j\omega T}\right) \overset{(a)}{=} P^*(j\omega) \overset{(b)}{=} \frac{1}{T}\sum_{K=-\infty}^{+\infty} P\left(j\left(\omega - \frac{2\pi}{T}K\right)\right)$$

(a) $\mathcal{Z}\{P(s)\} = \mathcal{Z}\{p(KT)\}$

$$\mathcal{Z}\{p(KT)\} = \mathcal{L}\{p^*(t)\}\Big|_{z=e^{sT}} = P^*(s)\Big|_{z=e^{sT}} = P^*(s)\Big|_{e^{j\omega T}=e^{sT}} = P^*(s)\Big|_{s=j\omega} = P^*(j\omega)$$

$$P_d\left(e^{j\omega T}\right) = \mathcal{Z}\{p(KT)\}\Big|_{z=e^{j\omega T}}$$

(b) $$P^*(s) = \frac{1}{T}\sum_{K=-\infty}^{+\infty} P\left(s - j\frac{2\pi}{T}K\right)$$

$$P^*(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{K=-\infty}^{+\infty} P\left(j\left(\omega - \frac{2\pi}{T}K\right)\right) = P_d\left(e^{j\omega T}\right)$$

Esempio

Se ho un filtro passa-basso con $P(j\omega) \ll 1$ se $\omega > \frac{\pi}{T}$, otterrò $P_d\left(e^{j\omega T}\right) \cong \frac{1}{T}P(j\omega)$, se $|\omega| < \frac{\pi}{T}$

Ovvero la funzione di risposta armonica discreta è simile a quella continua.

Esercizio

$$G(z) = \frac{z}{(z-0{,}1)(z-0{,}5)} \qquad u(k) \to \boxed{G(z)} \to y_\infty(k)$$

$u(k) = \text{sen}(0{,}2k)$

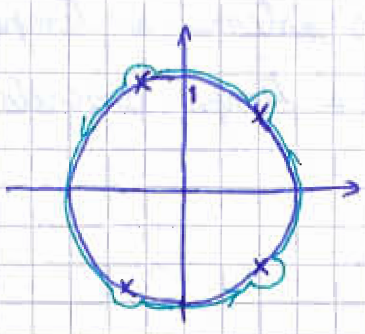
$y_\infty(k) = ?$

Applico il teorema di risposta armonica per $\omega T = 0{,}2$ ($\omega T k = 0{,}2k$)

$$y_\infty(k) = |G(e^{j0{,}2})| \,\text{sen}(0{,}2k + \arg G(e^{j0{,}2})) =$$

$$= 2{,}133 \cos(0{,}2k - 0{,}411)$$

Contorno di Nyquist per sistemi a tempo discreto



Il contorno di Nyquist per un sistema a tempo discreto è una curva che percorre una volta in senso antiorario il cerchio unitario, evitando i poli presenti sul cerchio unitario con semicerchi infinitesimi esterni al cerchio unitario.

Diagramma di Nyquist

Il diagramma di Nyquist di un sistema a tempo discreto con funzione di trasferimento $P(z)$ e contorno di Nyquist $\gamma(\lambda)$, $\lambda \in [0,1]$ è il luogo dei punti di $\mathbb{C}$ dato da

$$\{P(\gamma(\lambda)),\ \lambda \in [0,1]\}$$

Se $P(z)$ non ha poli sul cerchio unitario possiamo scegliere $\gamma(\lambda) = e^{j\lambda}$, $\lambda \in [0, 2\pi]$ allora il diagramma di Nyquist è

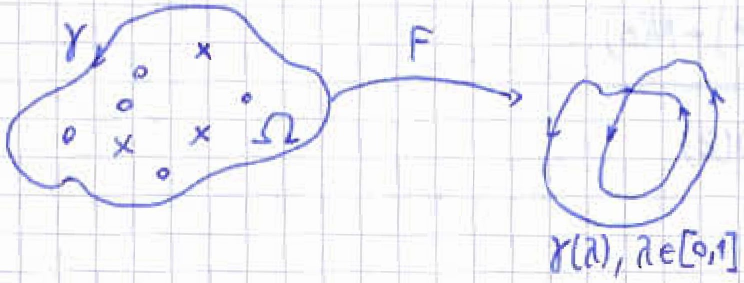
$\{P(e^{j\lambda}), \lambda \in [0, 2\pi]\}$

Esempio

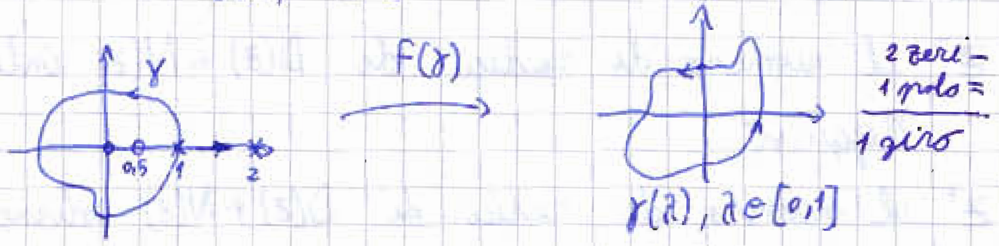
$$P(z) = \frac{z}{(z-0{,}5)(z+0{,}5)} \rightsquigarrow P(e^{j\omega T}) = \frac{e^{j\omega T}}{(e^{j\omega T}-0{,}5)(e^{j\omega T}+0{,}5)} \quad \text{complicato!}$$

Principio dell'argomento

Sia $\gamma(\lambda)$, $\lambda \in [0,1]$ una curva chiusa che circonda una volta in senso antiorario una regione Ω del piano complesso, sia $F(z)$ una funzione olomorfa definita su Ω tranne un numero finito di punti, allora la curva $F(\gamma(\lambda))$, $\lambda \in [0,1]$ circonda l'origine in senso antiorario un numero di volte pari alla differenza tra zeri e poli contenuti in Ω.



$$F(z) = \frac{z(z-0{,}5)}{(z-1)(z-2)}$$



Teorema di Nyquist per sistemi a tempo discreto

Un sistema a tempo discreto con funzione di trasferimento $P(z)$ collegato in retroazione unitaria secondo lo schema

è asintoticamente stabile $\Longleftrightarrow$ il diagramma di Nyquist associato a $P(z)$ non tocca il punto critico -1, ma lo circonda in senso antiorario un numero di volte pari al numero di poli di $P(z)$ con modulo <u>maggiore</u> di 1.

<u>Dim.</u> Considero $P(z) = \dfrac{N(z)}{D(z)}$

$$T_u^y(z) = \frac{P(z)}{1+P(z)}$$ so che $Q(z) = 1 + P(z)$ è l'equazione caratteristica

Applichiamo il principio dell'argomento alla funzione $1+P(z)$ usando come curva il contorno di Nyquist $\gamma(\lambda)$.
Il numero di giri di $1+P(\gamma(\lambda))$ attorno all'origine è dato dal numero di zeri − il numero di poli di $1+P(z)$ all'interno del contorno di Nyquist.

$$1+P(z) = 1 + \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{D(z)+N(z)}{D(z)}.$$

Considero:
z^- il numero di radici di $D(z)+N(z)$ interne al contorno di Nyquist
z^+ il numero di radici di $D(z)+N(z)$ esterne al contorno di Nyquist
p^- il numero di poli di $P(z)$ interni al contorno di Nyquist
p^+ il numero di poli di $P(z)$ esterni al contorno di Nyquist.

Il numero di giri $\#g = z^- - p^-$.

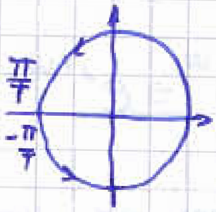
Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile $\Leftrightarrow z^- = n$, dove $n = \text{grado}\{D(z)\} \Longleftrightarrow \#g = n - p^- = n - n + p^+ = p^+$
$p^- + p^+ = n \Leftrightarrow \#g = p^+$

Quindi il numero di giri $\#g$ è uguale al numero di giri di $P(\gamma(\lambda))$ attorno a -1. ▨

13/05/2010

Quando non abbiamo poli sul cerchio unitario, il diagramma di Nyquist coincide con la funzione di risposta armonica.

Data $P(z)$, $\left\{P(e^{j\omega T}), \omega \in \left[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right]\right\}$



Tuttavia, è complesso lavorare con esponenziali:

Trasformata di Tustin

$$T: \mathbb{C} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longrightarrow w = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}$$

Calcolo la trasformata inversa T^{-1}

$$w = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1} \qquad wT(z+1) = 2(z-1) \qquad z(wT-2) = -2-wT$$

$$z = \frac{2+wT}{2-wT} = \frac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w} = T^{-1}(w)$$

Proprietà

1) $T^{-1}(j\omega_w) = e^{j2\arctan\left(\frac{T}{2}\omega_w\right)}$. rappresenta il cerchio unitario

<u>Dim.</u> $$T^{-1}(j\omega_w) = \frac{1+\frac{T}{2}j\omega_w}{1-\frac{T}{2}j\omega_w} = \frac{\cancel{\sqrt{1+\left(\frac{T}{2}\omega_w\right)^2}}}{\cancel{\sqrt{1+\left(\frac{T}{2}\omega_w\right)^2}}} \cdot e^{j\arctan\left(\frac{T}{2}\omega_w\right)-\left(-j\arctan\frac{T}{2}\omega_w\right)}$$

$$= e^{j2\arctan\left(\frac{T}{2}\omega_w\right)}$$ ▨

2) $e^{j\omega T} = T^{-1}(j\omega_w(\omega))$ dove $\omega_w(\omega) = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{T}{2}\omega\right)$

Dim.

$$T^{-1}\left(j\frac{2}{T}\tan\left(\frac{T}{2}\omega\right)\right) = \frac{1+\frac{T}{2}j\frac{2}{T}\tan\left(\frac{T}{2}\omega\right)}{1-\frac{T}{2}j\frac{2}{T}\tan\left(\frac{T}{2}\omega\right)} = e^{j2\arctan\left(\tan\left(\frac{T}{2}\omega\right)\right)} =$$

$$= e^{j2\frac{T}{2}\omega} = e^{jT\omega} \qquad \blacksquare$$

3) Consideriamo un sistema a tempo discreto con funzione di trasferimento $P(z)$ e $P_w(w) = P(T^{-1}(w))$ si ottiene sostituendo

$$z \to \frac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w}$$

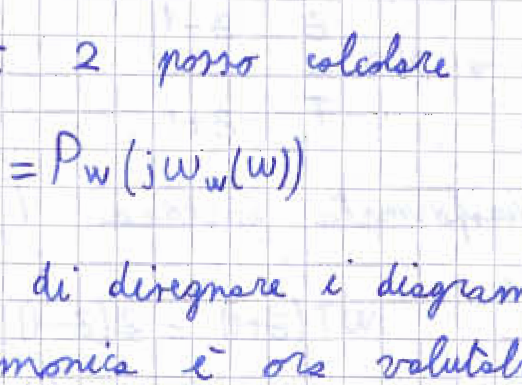
Utilizzando la proprietà 2 posso calcolare

$$P(e^{j\omega T}) = P\left(T^{-1}(j\omega_w(\omega))\right) = P_w(j\omega_w(\omega))$$

Questa proprietà permette di disegnare i diagrammi di Nyquist: la funzione di risposta armonica è ora valutabile sull'asse immaginario, come avveniva per i sistemi a tempo continuo.

Trovata $P_w(w)$, la funzione di risposta armonica si valuta sull'asse immaginario nel punto $j\omega_w(\omega)$ dove

$$\omega_w(\omega) = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{T}{2}\omega\right)$$



se $\frac{\omega T}{2} \ll 1$ $\omega_w(\omega) \simeq \omega$ perché tan ≃ retta

se $\frac{T}{2}\omega = \frac{\pi}{2}$, cioè $\omega =$ ... la tangente va a ∞

Per ω piccoli, quindi, l'ω di $P(e^{j\omega T})$ e l'ω_w di $P_w(j\omega_w(\omega))$ coincidono.

Per w grandi, invece, c'è una distorsione in frequenza, ovvero a w non vicini a 1, w_w tende all'infinito.

1) Tracciamento del diagramma di Nyquist

$$\left\{ P(e^{j\omega T}), \omega \in \left[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right] \right\} = \left\{ P_w(j\omega_w), \omega_w \in \mathbb{R} \right\}$$

Faccio quindi il cambio di coordinate $z \to \dfrac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w}$ e ottengo una funzione in w.

Disegno quindi il diagramma di Nyquist considerando w come se fosse s (caso continuo). Questa proprietà dice che i due diagrammi di Nyquist sono uguali.

Dim.

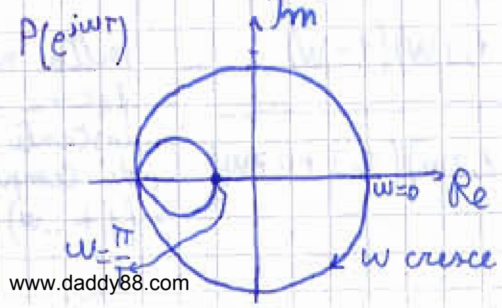
$$\left\{ P(e^{j\omega T}), \omega \in \left[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right] \right\} = \left\{ P_w\left(j\omega_w(\omega)\right), \omega \in \left[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right] \right\} = \left\{ P_w(j\omega_w), \omega_w \in \mathbb{R} \right\}$$

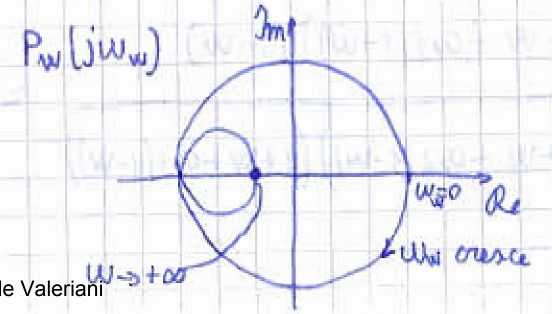
Riassumendo:

1) Sostituiamo $z \longrightarrow \dfrac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w}$ e otteniamo $P_w(w)$

2) Tracciamo il diagramma di Nyquist di $P_w(w)$ come fosse un sistema a tempo continuo

3) I punti del diagramma di Nyquist di $P_w(w)$ corrispondono ai punti del diagramma di Nyquist di $P(z)$ secondo la relazione $\omega_w(\omega) = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{T}{2}\omega\right)$ da cui $\omega = \frac{2}{T}\arctan\left(\frac{T}{2}\omega_w\right)$

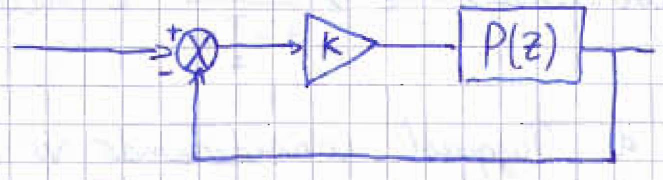




Il diagramma di Nyquist è lo stesso, ciò che cambia è come vengono parametrizzati w e w_w.

Variante del Teorema di Nyquist

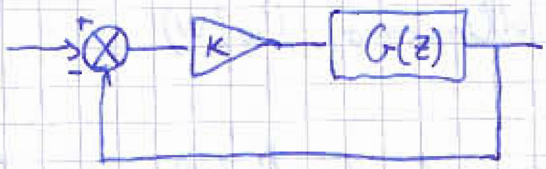
Consideriamo un sistema a tempo discreto con funzione di trasferimento $P(z)$ collegato secondo lo schema



con $K \in \mathbb{R}$, il sistema è asintoticamente stabile $\Longleftrightarrow$ il punto critico $-\frac{1}{K}$ non tocca il diagramma di Nyquist, ma viene circondato in senso antiorario un numero di volte pari al numero di poli di $P(z)$ esterni al cerchio unitario.

Esercizi

① Tracciare il diagramma di Nyquist del sistema:



$$G(z) = \frac{z - 0{,}1}{(z-0{,}2)(z+0{,}3)} \quad e \quad T = 2s$$

(a) applico la sostituzione $z \rightarrow \dfrac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w} = \dfrac{1+w}{1-w}$

$$G_w(w) = \frac{\frac{1+w}{1-w} - 0{,}1}{\left(\frac{1+w}{1-w} - 0{,}2\right)\left(\frac{1+w}{1-w} + 0{,}3\right)} = \frac{\frac{1+w-0{,}1(1-w)}{\cancel{1-w}}}{\left(\frac{1+w-0{,}2(1-w)}{1-w}\right)\left(\frac{1+w+0{,}3(1-w)}{\cancel{1-w}}\right)} =$$

$$= \frac{[1+w-0{,}1(1-w)](1-w)}{(1+w-0{,}2(1-w))(1+w+0{,}3(1-w))} = \frac{(0{,}9+1{,}1w)(1-w)}{(0{,}8+1{,}2w)(1{,}3+0{,}7w)} =$$

metto nella forma a costanti di tempo $(1+\dots w)(1+\dots$

$$= \boxed{\frac{0,9 \cdot 1}{0,8 \cdot 1,3}} \cdot \frac{\left(1+\frac{1,1}{0,9}W\right)(1-W)}{\left(1+\frac{3}{2}W\right)\left(1+\frac{0,7}{1,3}W\right)}$$

GUADAGNO STATICO $G_W(0)$

(b) Disegno il diagramma di Nyquist nel modo classico.

a) da dove parte? $G_W(0) = \dfrac{0,9 \cdot 1}{0,8 \cdot 1,3} = 0,865$

b) dove arriva? $\lim_{\omega_W \to +\infty} G_W(j\omega_W) = \lim_{W \to +\infty} G_W(W) = \dfrac{1,1 \cdot (-1)}{1,2 \cdot 0,7} = -1,31$

coefficienti di W

c) quanti giri fa intorno all'origine?

$$\arg G_W(j\omega_W) = \arctan\left(\frac{1,1}{0,9}\omega_W\right) - \arctan(\omega_W) - \arctan\left(\frac{3}{2}\omega_W\right) - \arctan\left(\frac{0,7}{1,3}\omega_W\right)$$

$\arg G_W(0) = 0$ mentre $\lim_{\omega_W \to +\infty} \arg(G_W(j\omega_W)) = -\pi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$

Ribaltando il grafico, ottengo ancora $-\pi$, pertanto sommando ottengo -2π, ovvero fa 1 giro attorno a 0.

Essendo un sistema non strettamente proprio ($\rho = n - m = 2-2 = 0$), il diagramma non tende a 0. Devo però capire come è fatto il grafico, calcolando le intersezioni con l'asse reale.
Iho due strade:

- $\arg G_W(j\omega_W) = -\pi$ difficile in questo caso (Metodo argomenti)

- $G_W(W) - \eta = 0$ imponendo che abbia una radice puramente immaginaria, ovvero facendo in modo che la tabella di Routh abbia una riga di tutti zeri. (Metodo analitico)

Applico il secondo metodo:

$$\frac{(0,9 + 1,1W)(1-W)}{\quad} - \eta = 0 \rightsquigarrow \text{pongo il numeratore uguale a 0}$$

$W^2(-1,1-0,84\eta)+W(0,2-2,12\eta)+0,9-1,04\eta=0$ voglio che il termine di grado 1 sia nullo, affinchè si abbiano radici complesse coniugate

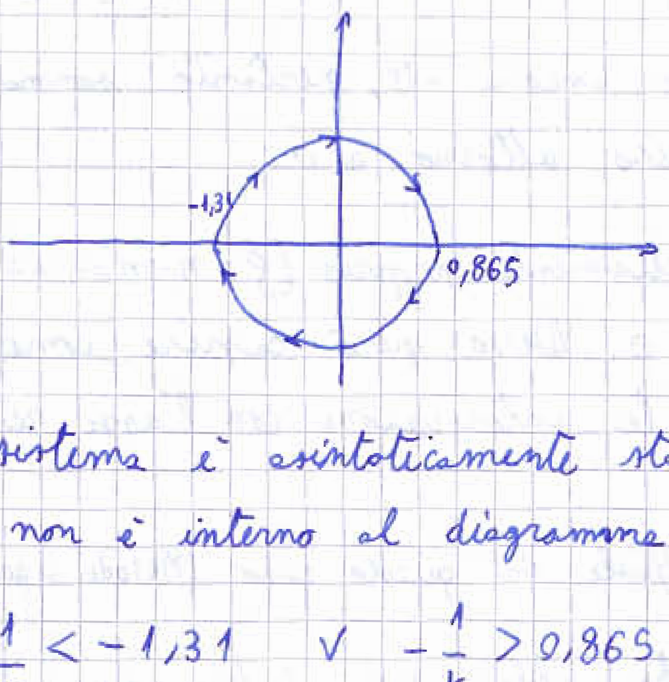
$(0,2-2,12\eta)=0 \qquad \eta=\frac{0,2}{2,12}=0,0943$

Verifico che $\eta=0,0943$ porti l'equazione ad avere radici complesse coniugate.

$-1,179\,W^2+0,8019=0 \qquad 1,179\,W^2=0,8019$

L'equazione ha radici reali coincidenti, quindi non ci sono radici complesse coniugate, quindi il diagramma di Nyquist non interseca l'asse reale.

Il diagramma di Nyquist diventa:



Il sistema è asintoticamente stabile quando il punto critico $-\frac{1}{K}$ non è interno al diagramma di Nyquist né lo tocca:

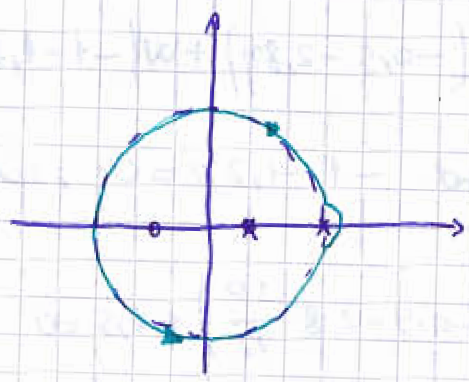
$-\frac{1}{K}<-1,31 \quad \vee \quad -\frac{1}{K}>0,865$

$K>\frac{1}{1,31} \quad \vee \quad K<-\frac{1}{0,865} \qquad$ cioè $\quad K\in(-1,155;0,76)$

Esercizio

Disegnare il diagramma di Nyquist con $T = 2s$ di:

$$G(z) = \frac{z+0{,}5}{(z-1)(z-0{,}4)}$$



$$z \rightarrow \frac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w} = \frac{1+w}{1-w}$$

$$G_w(w) = \frac{\frac{1+w}{1-w}+0{,}5}{\left(\frac{1+w}{1-w}-1\right)\left(\frac{1+w}{1-w}-0{,}4\right)} = \dots = \frac{(1{,}5+0{,}5w)(1-w)}{2w(0{,}6+1{,}4w)}$$

Il sistema ha un polo in 0, quindi avrò un asintoto verticale

$$G_w(w) = \frac{1{,}5\cdot 1}{2\cdot 0{,}6}\,\frac{\left(1+\frac{0{,}5}{1{,}5}w\right)(1-w)}{w\left(1+\frac{1{,}4}{0{,}6}w\right)} = 1{,}25\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{3}w\right)(1-w)}{w\left(1+\frac{7}{3}w\right)}$$

$$\lim_{w\to\infty} G_w(w) = \frac{-1\cdot 0{,}5}{2\cdot 1{,}4} = -0{,}178 \qquad G_w(0) = \infty \rightarrow \text{guardo l'argomento}$$

$$\arg G_w(j\omega_w) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\omega_w\right) - \operatorname{arctg}\omega_w - \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{7}{3}\omega_w\right)$$

$$\arg G_w(0) = 0 - 0 - \frac{\pi}{2} - 0 = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\omega_w\to\infty} \arg G_w(j\omega_w) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi$$

è a denominatore

$$\sigma = \underbrace{1{,}25}_{\text{Guadagno}}\underbrace{\left(\frac{1}{3} - 1 - \frac{7}{3}\right)}_{\text{coefficienti di } w \text{ tranne il polo in } 0} = -3{,}75 \quad \text{ascissa dell'asintoto verticale}$$

$$G_w(w) - \eta = 0 \qquad \frac{(1{,}5+0{,}5w)(1-w)}{2w(0{,}6+1{,}4w)} - \eta = 0$$

Cerco le intersezioni con l'asse x (metodo analitico)

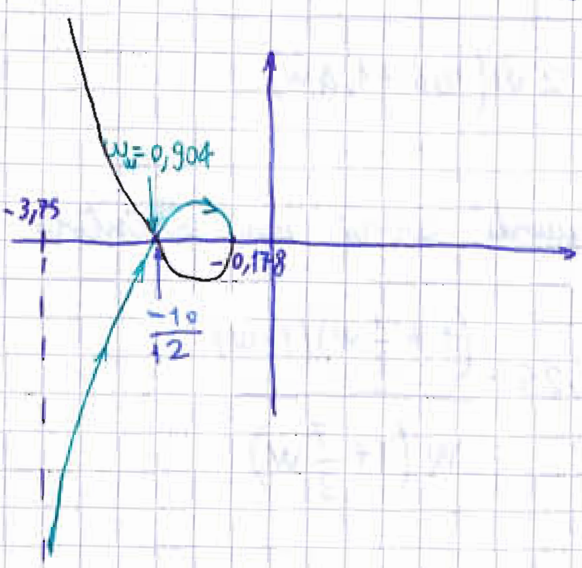
Alla fine si ottiene

$$W^2(-0{,}5-2{,}8\eta)+W(-1-1{,}2\eta)+1{,}5=0$$

Pongo $-1-1{,}2\eta=0$, cioè $\eta=-\frac{10}{12}$. Per verifica calcolo:

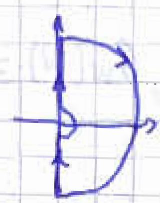
$$W^2\left(-0{,}5-2{,}8\cdot\frac{10}{12}\right)+1{,}5=0 \qquad 1{,}833W^2+1{,}5=0 \qquad W=\pm\sqrt{\frac{-1{,}5}{1{,}833}}=\pm j\,0{,}904$$

A noi interessa la soluzione positiva.



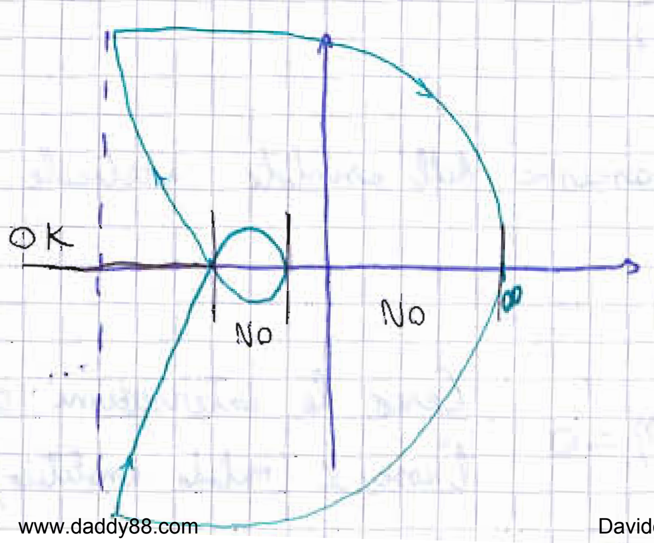
Quando $\omega_w=0{,}904$,

$$\omega=\frac{2}{T}\arctan\left(\frac{T}{2}\omega_w\right)=0{,}736$$

Ora devo chiudere il diagramma di Nyquist, perché .

Guardo la mia funzione di partenza, avevo 2 poli e 1 zero, pertanto il numero di giri intorno all'origine in senso antiorario è $\#z-\#p=1-2=-1$ cioè un giro in verso orario.

Completo quindi il diagramma:



Voglio ora calcolare i valori di K per cui il sistema è stabile

$-\frac{1}{K} < -\frac{10}{12}$, cioè $K < 1,2$ e ovviamente $K > 0$.

Esercizio

$$G(z) = \frac{z}{(z-0,6)(z-1,5)} \qquad \text{con } T=1$$

$$z \to \frac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w} = \frac{2+w}{2-w} \qquad G_w(w) = \frac{(1+0,5w)(1-0,5w)}{(0,4+0,8w)(-0,5+1,25w)} = -5\,\frac{(1+0,5w)(1-0,5w)}{(1+2w)(1-2,5w)}$$

$$G_w(0) = -5$$

$$\lim_{w\to\infty} G_w(w) = \frac{-0,5\cdot 0,5}{0,8\cdot 1,25} = -\frac{1}{4} = -0,25$$

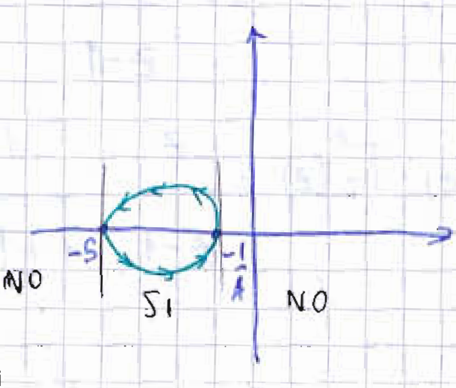
$$\arg G_w(j\omega_w) = \cancel{\mathrm{arctg}(0,5\omega_w)} + \cancel{\mathrm{arctg}(-0,5\omega_w)} - \mathrm{arctg}(2\omega_w) - \mathrm{arctg}(-2,5\omega_w) - \underset{\text{per il } -5}{\pi} =$$

$$= \mathrm{arctg}(2,5\omega_w) - \mathrm{arctg}(2\omega_w) - \pi$$

$$\left.\begin{aligned} &\arg G_w(0) = -\pi \\ &\lim_{\omega_w\to\infty} G_w(j\omega_w) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \pi = -\pi \end{aligned}\right\} \text{nessun giro intorno all'origine}$$

Dato che $\arg G_w(j\omega_w) \geq -\pi$, vuol dire che passo sotto all'asse reale.

Il diagramma di Nyquist diventa

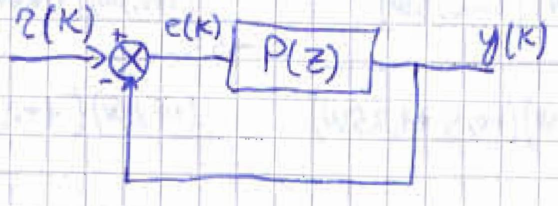


Avrò stabilità asintotica se e solo se il diagramma di Nyquist compie <u>un</u> giro intorno a $-\frac{1}{K}$ (un giro perchè ho un punto instabile: 1,5), cioè:

$$-5 < -\frac{1}{K} < -\frac{1}{4} \qquad 5 > \frac{1}{K} > \frac{1}{4} \qquad K \in (0{,}2;\ 4) \qquad \frac{1}{5} < K < 4$$

ERRORI A REGIME

Consideriamo uno schema del tipo



Il segnale $e(K) = r(K) - y(K)$ è il segnale di errore. Mi piacerebbe che fosse nullo.

Voglio ora trovare un modo per calcolare l'errore all'infinito.

Ipotizzo che il sistema sia asintoticamente stabile e che $P(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$. La funzione di trasferimento $T_r^e(z) = \frac{1}{1+P(z)} = \frac{1}{1+\frac{N(z)}{D(z)}}$.

$T_r^e(z) = \frac{D(z)}{N(z)+D(z)}$ ha poli nel cerchio unitario per ipotesi.

1) GRADINO

$r(K) = 1(K) \qquad R(z) = \frac{z}{z-1}$

$$E(z) = R(z) \cdot T_r^e(z) = \frac{z}{z-1} \cdot \frac{1}{1+P(z)}$$

e_∞ = errore a regime

$$e_\infty = \lim_{z\to 1} \cancel{(z-1)} \cdot \frac{z}{\cancel{z-1}} \frac{1}{1+P(z)} = \frac{1}{1+P(1)} = \frac{1}{1+K_s}$$ $K_s \to$ guadagno statico

Ipotizzo ora che il sistema sia di tipo 1, cioè che abbia un polo in 1, quindi $D(z) = (z-1)\,D'(z)$

$$E(z) = \frac{z}{z-1} \cdot \frac{(z-1)\,D'(z)}{(z-1)\,D'(z) + N(z)} = \frac{z \cdot D'(z)}{D'(z)\,(z-1) + N(z)}$$

Siccome i poli sono stabili per ipotesi, $\lim_{k\to+\infty} e(k) = 0$

2) RAMPA

$r(k) = T \cdot k \qquad R(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2}$

$$E(z) = \frac{T \cdot z}{(z-1)^2} \cdot \frac{D(z)}{N(z)+D(z)}$$ l'errore sarebbe infinito; per renderlo finito dovrei mettere uno zero in 1.

Se il tipo $= 0$, $e(k) \to \infty$

Se il tipo $= 1$, scrivo $D(z) = (z-1)\,D'(z)$ e ottengo:

$$E(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2} \cdot \frac{\cancel{(z-1)}\,D'(z)}{N(z) + (z-1)\,D'(z)}$$ applico il teorema del valore finale

$$e_\infty = \lim_{z\to 1} \cancel{(z-1)} \cdot \frac{Tz}{\cancel{z-1}} \cdot \frac{D'(z)}{N(z)+(z-1)\,D'(z)} = \lim_{z\to 1} \frac{T \cdot D'(z)}{N(z)} = \lim_{z\to 1} \frac{1}{\frac{N(z)\cdot(z-1)}{D(z)\cdot T}} =$$

$$= \frac{1}{K_v} \qquad K_v = \text{costante di velocità} = \lim_{z\to 1} P(z)\cdot(z-1)\cdot\frac{1}{T}$$

Se il tipo > 1, posso scrivere $D(z) = (z-1)^2 \cdot D'(z)$

$$E(z) = \frac{T(z)}{\cancel{(z-1)^2}} \cdot \frac{D'(z) \cdot \cancel{(z-1)^2}}{D(z) + N(z)}$$

$e_\infty = 0$ essendo i poli stabili

3) PARABOLA

$$r(k) = \frac{T^2}{2} \cdot k^2 \qquad R(z) = \frac{T^2}{2} \cdot \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

$$E(z) = \frac{T^2}{2} \cdot \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \cdot \frac{D(z)}{N(z)+D(z)}$$

Se il tipo $= 0$, $e(k) \to \infty$

Se il tipo $= 1$, $e(k) \to \infty$

Se il tipo $= 2$, scrivo $D(z) = (z-1)^2 D'(z)$

$$E(z) = \frac{T^2}{2} \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \frac{\cancel{(z-1)^2} D'(z)}{N(z) + (z-1)^2 D(z)}$$

Applico il teorema del valore finale e ottengo

$$e_\infty = \lim_{z \to 1} \frac{\cancel{(z-1)} \overset{1}{z} \overset{2}{(z+1)} T^2}{2 \cancel{(z-1)}} \cdot \frac{D'(z)}{N(z) + (z-1)^2 D(z)} = \lim_{z \to 1} T^2 \cdot \frac{D'(z)}{N(z)} =$$

$$= \lim_{z \to 1} \frac{1}{\frac{N(z)}{D(z)} \frac{(z-1)^2}{T^2}} = \frac{1}{K_a}$$

$K_a =$ costante di accelerazione $= \lim_{z \to 1} \frac{P(z)(z-1)^2}{T^2}$

Se il tipo > 2, scrivo $D(z) = (z-1)^3 D'(z)$

$$E(z) = \frac{T^2}{2} \frac{z(z+1)}{\cancel{(z-1)^3}} \cdot \frac{\cancel{(z-1)^3} D'(z)}{N(z) + (z-1)^3 D'(z)}$$

essendo i poli stabili, come prima, $e_\infty = 0$

Tabella riassuntiva

Tipo / $r(K)$	0	1	2	3
$1(K)$	$\frac{1}{1+K_s}$	0	0	0
TK	∞	$\frac{1}{K_v}$	0	0
$\frac{T^2K}{2}$	∞	∞	$\frac{1}{K_a}$	0

19/05/2010

PROGETTAZIONE DEI MICROCONTROLLORI

Ci sono tre metodi:
- trasformata di Tustin
- discretizzazione

(Tustin e discretizzazione: usando metodi del continuo)

- progetto analitico

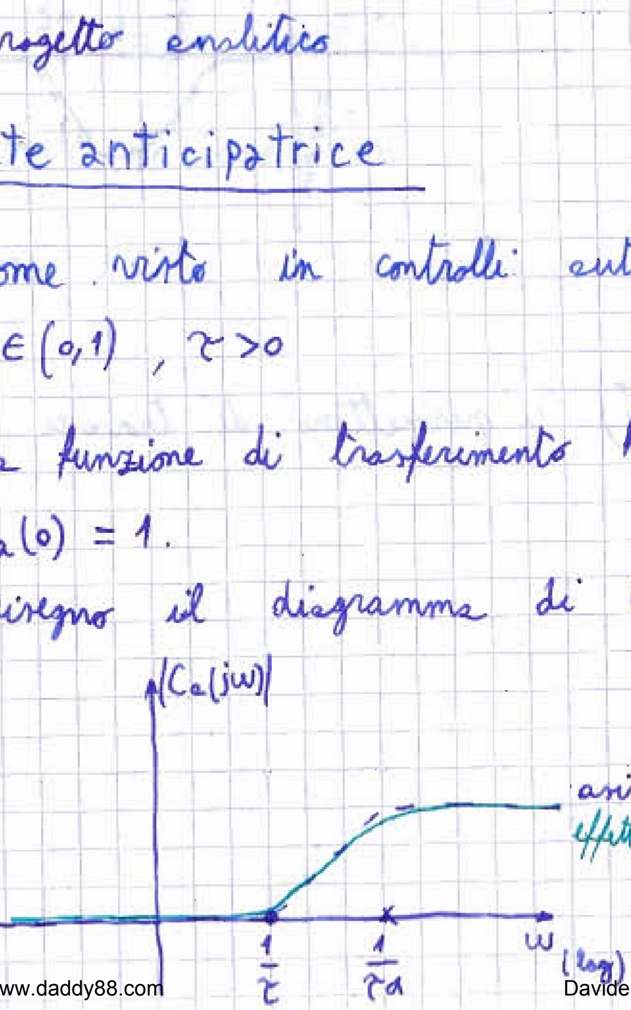
Rete anticipatrice

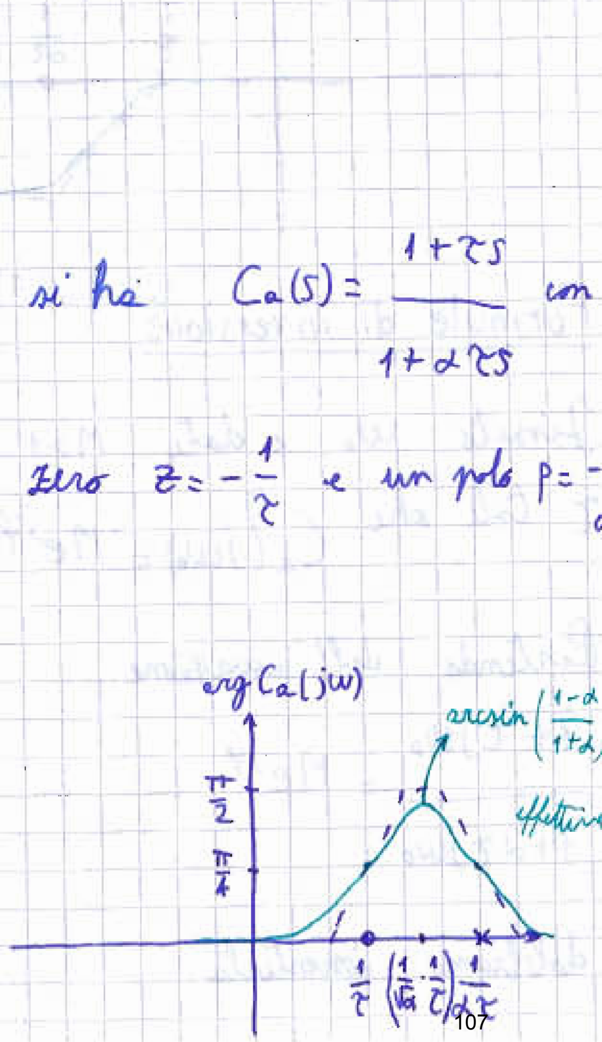
Come visto in controlli automatici, si ha $C_a(s) = \frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}$ con $\alpha \in (0,1)$, $\tau > 0$

La funzione di trasferimento ha uno zero $z = -\frac{1}{\tau}$ e un polo $p = -$

$C_a(0) = 1$.

Disegno il diagramma di Bode:





Si vede che la rete anticipatrice non potrà mai dare un anticipo di fase superiore a $\frac{\pi}{2}$.

Chiamiamo M il guadagno di ampiezza della rete $(M>1)$ e φ il guadagno di fase $(\varphi \in (0, \frac{\pi}{2}))$. $C_a(j\omega_0) = Me^{j\varphi}$

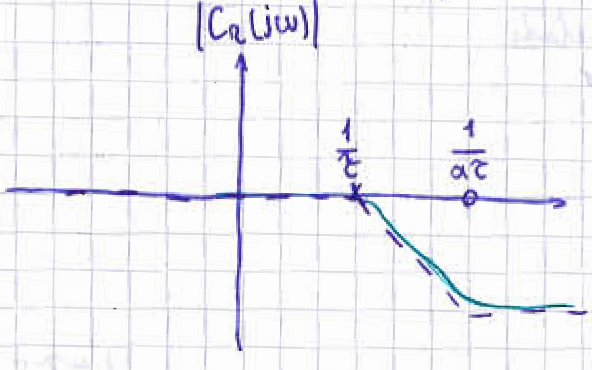
Rete ritardatrice

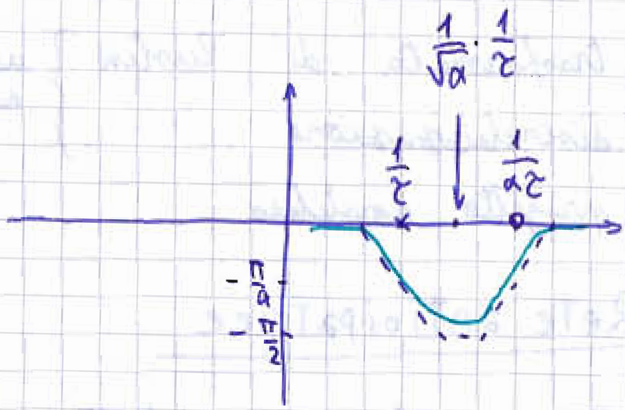
È la stretta parente di quella precedente: $C_r(s) = \dfrac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s} = C_a(s)^{-1}$

Ha un polo $p = -\frac{1}{\tau}$ e uno zero $z = -\frac{1}{\alpha\tau}$.

I diagrammi di Bode saranno uguali ai precedenti ma ribaltati rispetto all'asse x.

$$C_r(j\omega_0) = C_a(j\omega_0)^{-1} = \frac{1}{M} e^{-j\varphi}$$





Formule di inversione

Fissato ω_0 e dati $M>1$, $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ ci permettono di trovare α e τ tali che $C_a(j\omega_0) = Me^{j\varphi}$.

Partendo dall'equazione

$$\frac{1+\tau j\omega_0}{1+\alpha\tau j\omega_0} = Me^{j\varphi}$$

dobbiamo invertirla.

$1+\tau j\omega_0 = M(\cos\varphi + j\sin\varphi)(1+\alpha\tau j\omega_0)$ calcolo parte reale e immaginaria

$$\begin{cases} 1 = M\cos\varphi - M\sin\varphi\cdot\tau\alpha\omega_0 \\ \tau\omega_0 = M(\sin\varphi + \cos\varphi\,\alpha\tau\omega_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau\alpha\omega_0 = \dfrac{M\cos\varphi - 1}{M\sin\varphi} \\ \tau\omega_0 = M\left(\sin\varphi + \cos\varphi\cdot\dfrac{M\cos\varphi-1}{M\sin\varphi}\right) = \cancel{M}\dfrac{\overbrace{M\sin^2\varphi + M\cos^2\varphi}^{M(1)} - \cos\varphi}{\cancel{M}\sin\varphi} = \dfrac{M-\cos\varphi}{\sin\varphi} \end{cases}$$

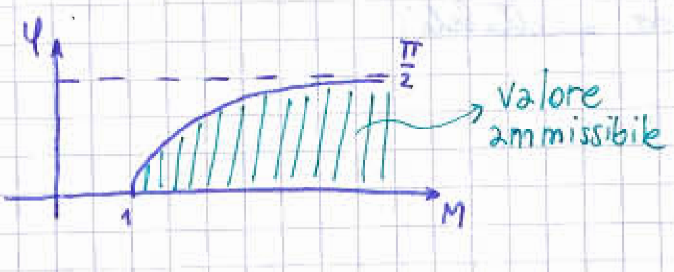
$$\begin{cases} \tau = \dfrac{M-\cos\varphi}{\sin\varphi\cdot\omega_0} \\ \alpha = \dfrac{M\cos\varphi-1}{M\sin\varphi}\cdot\dfrac{1}{\tau\omega_0} = \dfrac{M\cos\varphi-1}{M\cancel{\sin\varphi}}\cdot\dfrac{\cancel{\sin\varphi}}{M-\cos\varphi} = \dfrac{M\cdot\cos\varphi-1}{M(M-\cos\varphi)} \end{cases}$$

Ora verifico che le due formule di inversione trovate

$\tau = \dfrac{M-\cos\varphi}{\sin\varphi\cdot\omega_0}$ e $\alpha = \dfrac{M\cos\varphi - 1}{M(M-\cos\varphi)}$ soddisfino le condizioni:

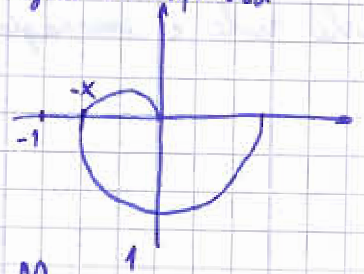
① $\tau > 0$ vero perché $M-\cos\varphi > 0$ essendo $M>1$

② $\alpha\in(0,1)$ deve essere $\alpha>0$, quindi $M\cos\varphi > 1$, cioè $\varphi < \arccos\left(\frac{1}{M}\right)$

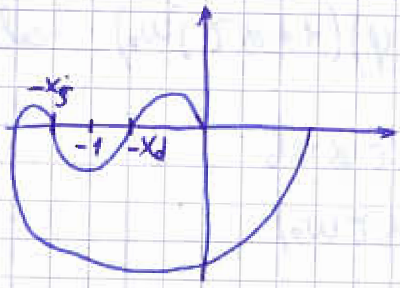


Queste formule mi permettono di fissare i parametri del sistema come margine d'ampiezza e margine di fase

Margine di ampiezza



$$M_A = \frac{1}{x}$$

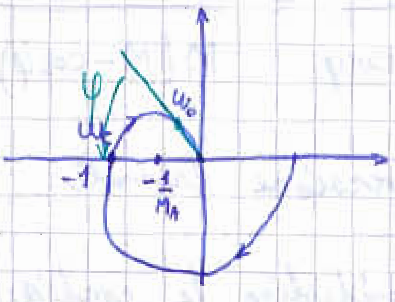


$$M_A = \min\left\{\frac{1}{x_d}, x_S\right\}$$

Le formule di inversione ci permettono di far passare il diagramma di Nyquist per un certo punto.

Dare un guadagno di ampiezza a un sistema significa allontanare il diagramma di Nyquist dall'origine.

Supponiamo di voler imporre un margine di ampiezza M_A al sistema (rete anticipatrice):



1) Scelgo ω_0 tale che $|P(j\omega_0)| < \frac{1}{M_A}$

2) Calcolo $M = \frac{\text{Ampiezza Finale}}{\text{Ampiezza iniziale}} = \frac{\frac{1}{M_A}}{|P(j\omega_0)|} = \frac{1}{M_A\,|P(j\omega_0)|}$

φ = Fase Finale − Fase iniziale $= -\pi - \arg P(j\omega_0)$.

3) Devo verificare che i valori siano accettabili:

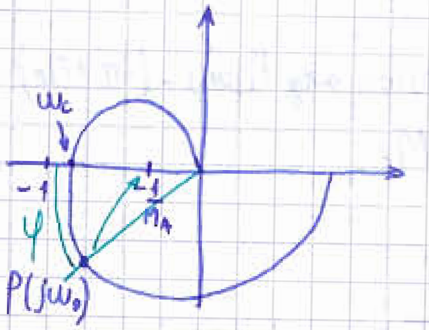
(a) $M > 1$

(b) $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

(c) $M\cos\varphi > 1$

Se non sono verificate, devo cambiare ω_0 (scelto ad occhio!).

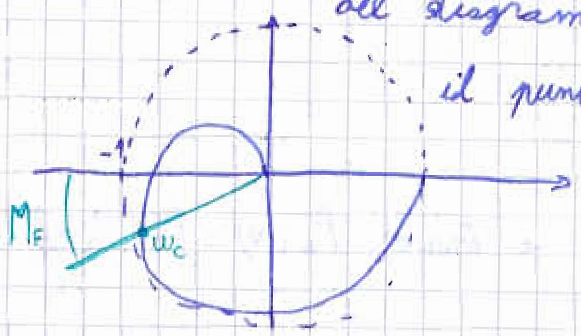
Guardiamo ora il caso di rete ritardatrice (M è attenuazione di ampiezza e φ è ritardo di fase):



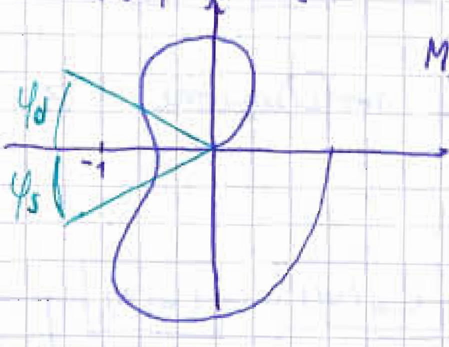
$$M=\left(\frac{\text{Ampiezza finale}}{\text{Ampiezza iniziale}}\right)^{-1}=|P(j\omega_0)|\cdot M_A$$

$$\varphi=-(\text{Fase finale}-\text{Fase iniziale})=\arg P(j\omega_0)-(-\pi)=$$
$$=\pi+\arg P(j\omega_0)$$

Margine di fase → robustezza rispetto al ritardo di fase, cioè alla rotazione del diagramma in senso orario, portandolo oltre il punto critico -1.

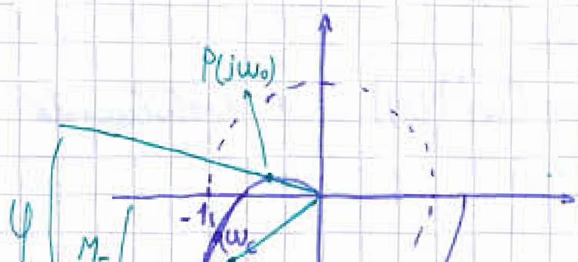


caso particolare



$M_F=\min\{\varphi_d,\varphi_s\}$

Supponiamo di voler imporre un margine di fase M_F alla rete anticipatrice:

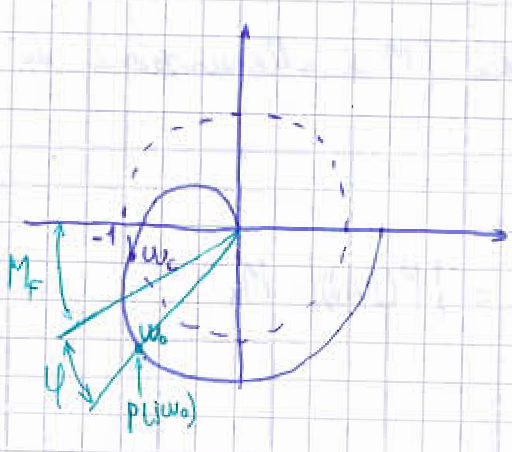


$$M=\frac{\text{Ampiezza finale}}{\text{Ampiezza iniziale}}=\frac{1}{|P(j\omega_0)|}$$

$$\varphi=\text{Fase finale}-\text{Fase iniziale}=-\pi+M_F-\arg P(j\omega_0)$$

Verifico che $M>1$, $\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $M\cos\varphi>1$.

Vediamo ora l'ultimo caso, ovvero il margine di fase per una rete ritardatrice, quindi scelgo $\omega_0<\omega_c$ perché mi sposto verso l'origine e ruoto in senso orario.

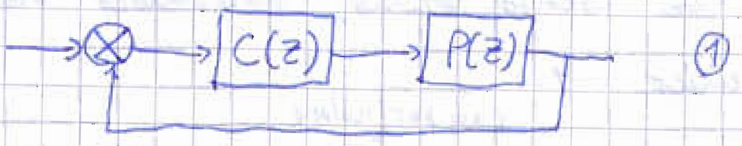


$$M = \frac{\text{Ampiezza iniziale}}{\text{Ampiezza Finale}} = \frac{|P(j\omega_0)|}{1} = |P(j\omega_0)|$$

$$\varphi = \text{Fase iniziale} - \text{Fase Finale} = \arg P(j\omega_0) - (-\pi + M_F) =$$
$$= \arg P(j\omega_0) + \pi - M_F$$

-1- Progetto mediante trasformata di Tustin

Vogliamo costruire un controllore che controlli il sistema $P(z)$:



Facciamo la sostituzione $z \to \dfrac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w}$ e trovo $P_w(w) = P(T^{-1}(w))$

Progettiamo $C_w(w)$ con le tecniche per i sistemi a tempo continuo, considerando w come se fosse s.
Infine, antitrasformiamo ponendo $C(z) = C_w(T(z))$ e sostituendo

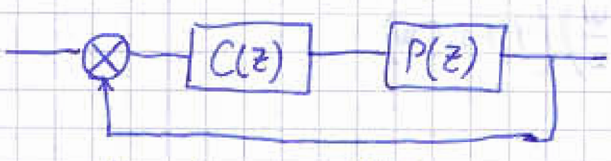
$$w \to \frac{2}{T}\,\frac{z-1}{z+1}$$

Il diagramma di Nyquist di $C(z)P(z)$ coincide come forma con quello di $C_w(w)P_w(w)$. Questo garantisce che le specifiche
- margine di fase
- margine di ampiezza
- errore a regime

siano soddisfatte per il sistema ① se lo sono per il sistema ②

Esercizio

Dato il sistema seguente, con $P(z) = \dfrac{z+0{,}8}{2z(z-0{,}5)}$, progettare $C(z)$



seguendo le specifiche:

* e_∞ al gradino $= 0{,}2$
* $M_A = 2$
* uso di una rete ritardatrice $C_w(w) = K \dfrac{1+\alpha\tau w}{1+\tau w}$

Per prima cosa, faccio la trasformata di Tustin di $P(z)$:

$$T = 1 \longrightarrow \quad z \rightarrow \frac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w} = \frac{2+w}{2-w}$$

$$P_w(w) = \frac{\frac{2+w}{2-w}+0{,}8}{2\cdot\frac{2+w}{2-w}\left(\frac{2+w}{2-w}-0{,}5\right)} = \frac{(0{,}2w+3{,}6)(2-w)}{2(2+w)(1+1{,}5w)}.$$ Impongo la prima specifica:

$$e_\infty = \frac{1}{1+K_p} = 0{,}2 \Rightarrow 1+K_p = 5 \Rightarrow K_p = 4$$ guadagno statico

$$K_p = C_w(0)\cdot P_w(0) = K\cdot\frac{3{,}6\cdot\cancel{2}}{2\cdot\cancel{2}\cdot 1} = 1{,}8\cdot K = 4 \Rightarrow K = \frac{20}{9}$$

Ora che ho trovato K, lo devo includere prima di tracciare il diagramma di Nyquist per poi applicare le formule di inversione.

Definisco $L_1(w) = K\cdot P_w(w)$.

Le formule di inversione si applicano solo alla rete ritardatrice $\dfrac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s}$

$$L_1(w) = \underbrace{\frac{20}{9}}_{C_w(0)} \cdot \frac{(0{,}2w+3{,}6)(2-w)}{2(2+w)(1+1{,}5w)} = \underset{\substack{\uparrow \\ C_w(0)\cdot P_w(0)}}{4} \cdot \frac{\left(1+\frac{0{,}2}{3{,}6}w\right)\left(1-\frac{w}{2}\right)}{\left(1+\frac{w}{2}\right)(1+1{,}5w)}$$

$L_1(0) = 4$ (da dove parti)

$$\lim_{w\to+\infty} L_1(w) = \frac{4\cdot\frac{0{,}2}{3{,}6}\left(-\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}\cdot 1{,}5} = -0{,}1481 \quad \text{(dove arriva)}$$

$$\arg L_1(j\omega_w) = \arctan\left(\frac{0{,}2}{3{,}6}\omega_w\right) - \arctan(0{,}5\omega_w) - \arctan(0{,}5\omega_w) - \arctan(1{,}5\omega_w)$$

$\arg L_1(0) = 0 \qquad \lim_{\omega_w\to\infty} L_1(j\omega_w) = -\pi$ mezzo giro intorno all'origine

1 giro se considero il diagramma completo

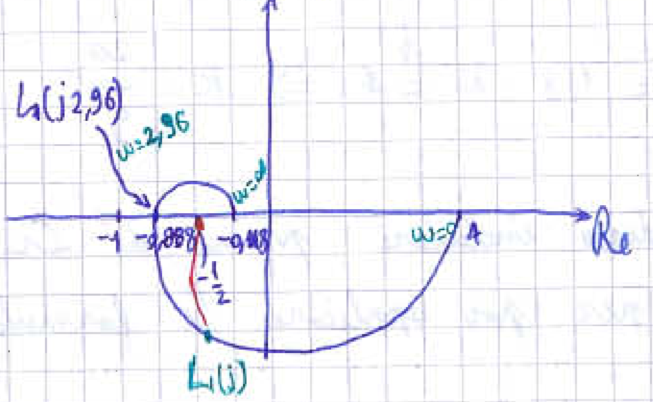
$$L_1(w) - \eta = 0 \quad \dots \quad w^2\left(-0{,}75\eta - \frac{1}{9}\right) + w(-2\eta - 1{,}777) - \eta + 4 = 0$$

$$-2\eta - 1{,}777 = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta = -0{,}888$$

Sostituisco η sopra per verificare che le radici siano $\in \mathbb{C}$:

$$w^2 \cdot 0{,}556 + 4{,}888 = 0 \quad \rightarrow \quad w = \pm j\sqrt{\frac{4{,}888}{0{,}556}} = \pm j\,2{,}96$$ prendo la parte positiva

$\omega_w = 2{,}96$



Scelgo una pulsazione ω_0 più piccola di ω_w. La rete ritardatrice farà ruotare il diagramma in senso orario e avvicinarlo all'origine.

Il margine di fase attuale è $M_A = \dfrac{1}{0{,}888} \simeq 1{,}1$.

Scelgo, per provare, $\omega_0 = 1$.

$L_1(j\omega_0) = L_1(j) = -0{,}622 - 2{,}133\, j$ punto del terzo quadrante

$$M = \frac{\text{Ampiezza iniziale}}{\text{Ampiezza Finale}} = \frac{|L_1(j)|}{\frac{1}{2}} \qquad |L_1(j)| = \sqrt{(0{,}622)^2 + (2{,}133)^2} = 2{,}22$$

M_A

$$M = \frac{2{,}22}{0{,}5} = 4{,}44$$ è maggiore di 1 ✓

$$\varphi = \text{Fase iniziale} - \text{Fase Finale} = \operatorname{arctg} \frac{-2{,}133}{-0{,}622} - (-\pi) = 1{,}287$$ compreso tra 0 e $\frac{\pi}{2}$ ✓

$M\cos\varphi = 1{,}24$ è maggiore di 1 ✓

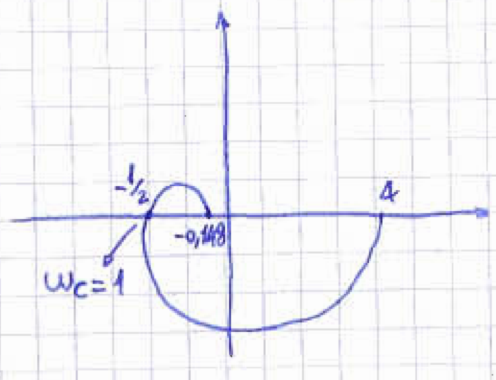
Posso quindi applicare le formule di inversione.

$$\tau = \frac{M - \cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi \cdot \omega_0} = 4{,}33 \qquad \alpha = \frac{M\cos\varphi - 1}{M(M - \cos\varphi)} = 0{,}0132$$

Posso ora scrivere la formula completa del controllore:

$$C_W(w) = K \cdot \frac{1 + \alpha\tau s}{1 + \tau s} = \frac{20}{9} \cdot \frac{1 + 0{,}05729\, w}{1 + 4{,}338\, w}$$

che ha diagramma di Nyquist



Tutti gli ω_0 vanno bene, basta che rispettino le condizioni.

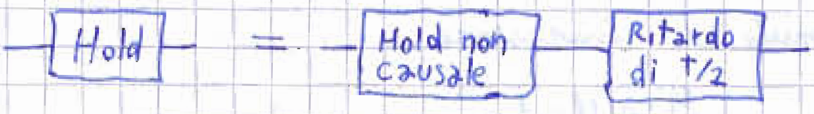
Ora non resta che fare l'antitrasformata di Tustin $w \to \frac{2}{T=1}\,\frac{z-1}{z+1}$

$$C(z) = \frac{20}{9}\,\frac{1+0{,}05729\cdot 2\cdot\frac{z-1}{z+1}}{1+4{,}338\cdot 2\cdot\frac{z-1}{z+1}} = \frac{0{,}256z+0{,}2033}{z-0{,}7933}$$ che conclude l'esercizio.

2 - PROGETTO MEDIANTE DISCRETIZZAZIONE

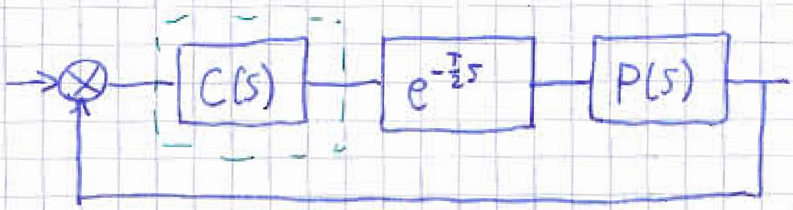
Ho un sistema del tipo:

con un controllore discreto e un filtro di hold.
Ricordiamo che il filtro di hold introduceva un ritardo di $\frac{T}{2}$

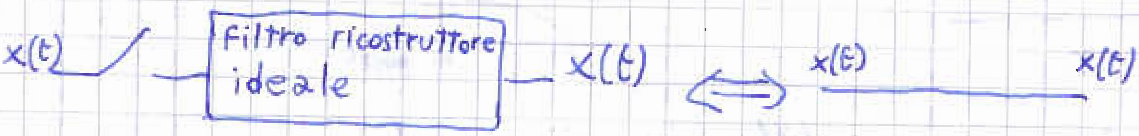


Per utilizzare questo metodo devo fare due approssimazioni:
1) sostituire al filtro di hold non causale un filtro di ricostruzione ideale. Lo schema diventa:

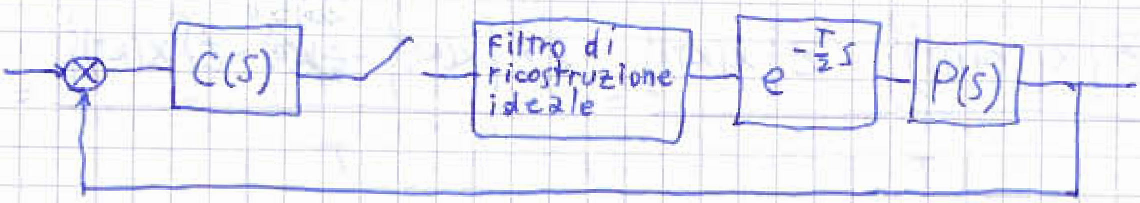
considero un controllore continuo:



2) aggiungere al sistema un campionatore e un filtro di ricostruzione ideale, tanto:

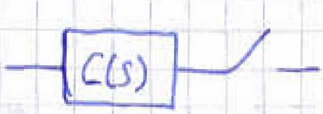


Il sistema diventa

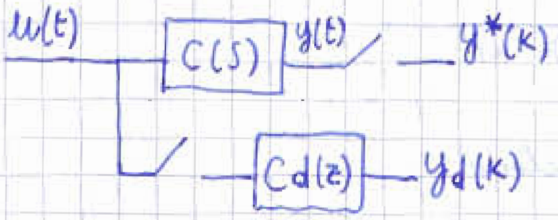


Ora confrontiamo i due sistemi. I due sistemi sono equivalenti se

ha lo stesso comportamento di



cioè se, nel sistema



vale che $y^*(K) \cong y_d(K)$

La parte di progetto viene fatta a tempo continuo, mentre la conversione da continuo a discreto viene fatta secondo alcune tecniche.

Approssimazione a tempo discreto della derivata

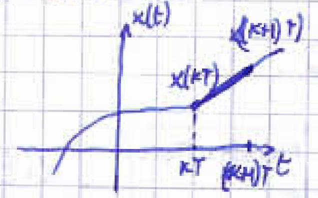
$x(t) \longrightarrow x^*(K) = x(KT) \longrightarrow X(z) = \mathcal{Z}\{x^*(K)\}$

Vogliamo trovare una regola per $\mathcal{Z}\{Dx(KT)\}$

Per definizione so $Dx(t) = \lim_{h \to 0} \dfrac{x(t+h) - x(t)}{h}$

1) Posso approssimare la derivata di $x(kT)$ come

$$D\,x(kT) \cong \frac{x((k+1)T) - x(kT)}{T}$$



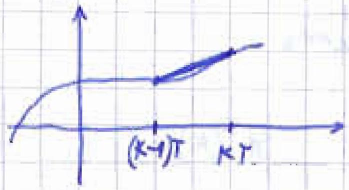
usando l'approssimazione per differenze in avanti.
Calcolo la trasformata zeta:

$$\mathcal{Z}\{D\,x(kT)\} = \frac{\mathcal{Z}\{x((k+1)T)\} - \mathcal{Z}\{x(kT)\}}{T} = \frac{z\,\mathcal{Z}\{x(kT)\} - \overset{\text{trascuro } x(0)\cong 0}{\cancel{z\,x(0)}} - \mathcal{Z}\{x(kT)\}}{T} =$$

$$= \frac{(z-1)}{T}\,\mathcal{Z}\{x(kT)\} = \frac{z-1}{T}\,X(z)$$

2) Un'altra approssimazione è quella per differenza all'indietro:

$$D\,x(kT) \cong \frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T}$$



Calcolo la trasformata usando questo metodo:

$$\mathcal{Z}\{D\,x(kT)\} = \frac{1}{T}\cdot\left[\mathcal{Z}\{x(kT)\} - \mathcal{Z}\{x((k-1)T)\}\right] =$$

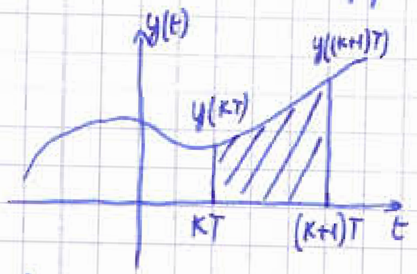
$$= \frac{1}{T}\left[\mathcal{Z}\{x(kT)\} - z^{-1}\mathcal{Z}\{x(kT)\} - \overset{\text{trascuro}}{\cancel{x(-T)}}\right] = \frac{1-z^{-1}}{T}\,\mathcal{Z}\{x(kT)\} =$$

$$= \frac{z-1}{zT}\,X(z)$$

3) L'ultimo metodo di discretizzazione è quello un po' più raffinato.

$y(t) = D\,x(t)$ per definizione so che $x((k+1)T) - x(kT) = \int_{kT}^{(k+1)T} y(t)\,dt$

Andiamo ora ad approssimare questo integrale. Disegnamo il grafico:



L'integrale sarebbe l'area sottesa dalla curva, che posso approssimare all'area del trapezio.

$$\int_{kT}^{(k+1)T} y(t)\,dt \cong \frac{y(kT)+y((k+1)T)}{2}\cdot T$$

altezza $(k+1)T - kT$

applico la trasformata Zeta

$$Z\{x((k+1)T)\} - Z\{x(kT)\} \cong \frac{T}{2}\left[Z\{y(kT)\} + Z\{y((k+1)T)\}\right]$$

$$z\cdot Z\{x(kT)\} - \underbrace{\cancel{x(0)}}_{\text{trascuro}} = \frac{T}{2}\left[Z\{y(kT)\} + z\,Z\{y(kT)\} \underbrace{-\cancel{y(0)}}_{\text{trascuro}}\right]$$

$$Z\{y(kT)\} = \frac{2}{T}\,\frac{z-1}{z+1}\,Z\{x(kT)\}$$

$$Z\{Dx(kT)\} = \frac{2}{T}\,\frac{z-1}{z+1}\,Z\{x(kT)\}$$

Riassumendo, ho visto che $Z\{Dx(kT)\}$ si può approssimare a:

1) $\dfrac{z-1}{T}\,X(z)$

2) $\dfrac{z-1}{zT}\,X(z)$

3) $\dfrac{2}{T}\,\dfrac{z-1}{z+1}\,X(z)$

Assumiamo che $C(s)$ si possa scrivere:

$$C(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0}$$

Visto che $Y(s) = C(s) \cdot U(s)$ diventa

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0)\, Y(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0)\, U(s)$$

$$a_n D^n y(t) + a_{n-1} D^{n-1} y(t) + \ldots + a_0 y(t) = b_m D^m u(t) + \ldots + b_0 u(t)$$ pongo $t = KT$

$$a_n D^n y(KT) + \ldots + a_0 y(KT) = b_m D^m u(KT) + \ldots + b_0 u(KT)$$

Tenendo conto, ad esempio, della prima approssimazione della derivata,

$$Z\left\{ D^\ell x(KT) \right\} = \left(\frac{z-1}{T} \right)^\ell X(z)$$

sostituisco nell'equazione differenziale:

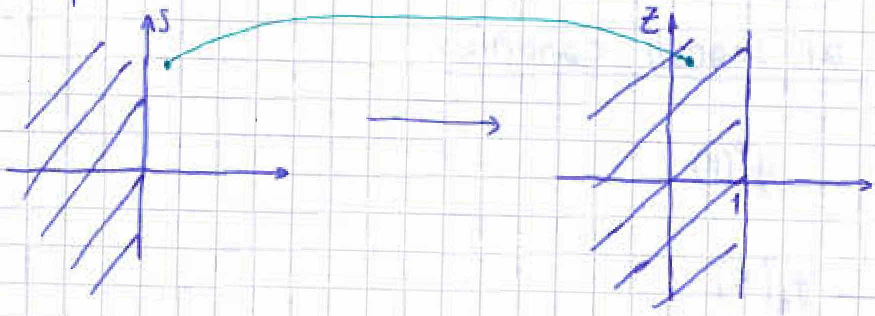
$$a_n \left(\frac{z-1}{T} \right)^n Y(z) + a_{n-1} \left(\frac{z-1}{T} \right)^{n-1} Y(z) + \ldots + a_0 Y(z) = b_m \left(\frac{z-1}{T} \right)^m U(z) + \ldots + b_0 U(z)$$

ricavo $Y(z)$

$$Y(z) = \underbrace{\frac{b_m \left(\frac{z-1}{T} \right)^m + \ldots + b_0}{a_n \left(\frac{z-1}{T} \right)^n + \ldots + a_0}}_{C_d(z)} U(z) \qquad \text{dove } s \to \frac{z-1}{T}$$

Vediamo ora come i poli del sistema a tempo continuo vengono mandati nei poli del sistema a tempo discreto, con le varie approssimazioni:

1) $S = \frac{z-1}{T} \rightarrow TS = z-1 \rightarrow z = 1+TS$

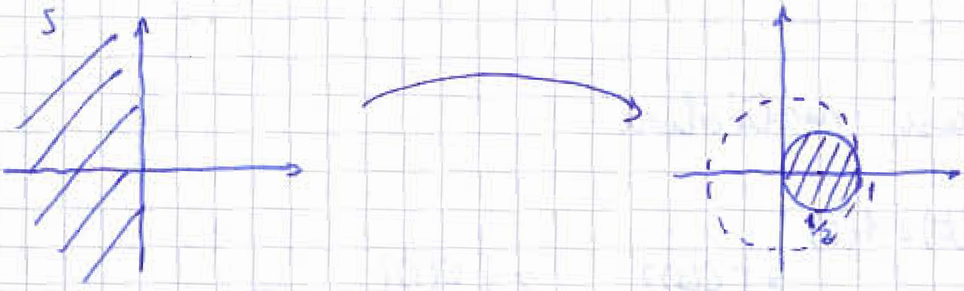


Questo metodo altera troppo le caratteristiche del sistema perché punti che garantivano la stabilità nel continuo diventano instabili nel discreto. Poco usato! Troppa distorsione!

2) $s = \frac{z-1}{zT} \rightarrow zTs = z-1 \rightarrow z = \frac{1}{1-Ts} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{1-Ts} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1+Ts}{1-Ts}$

$\xrightarrow{s=j\omega} z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1+jT\omega}{1-jT\omega} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{\underbrace{j2\arctan T\omega}_{\text{va da } -\pi \text{ a } \pi}}$

è un cerchio di raggio $\frac{1}{2}$ centrato in $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

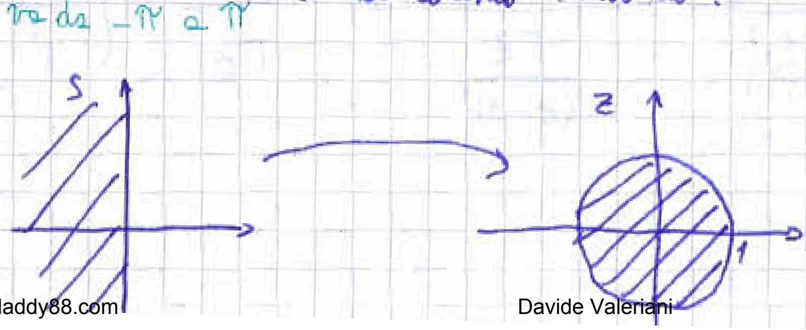


Mi manda la regione stabile in un'altra regione stabile.

21/05/201

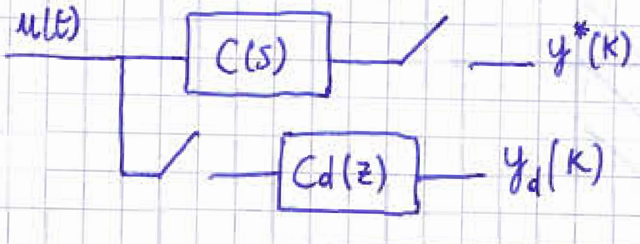
3) $s = \frac{2}{T}\cdot\frac{z-1}{z+1} \rightarrow z = \frac{1+\frac{T}{2}s}{1-\frac{T}{2}s} \xrightarrow{s=j\omega} \frac{1+\frac{T}{2}j\omega}{1-\frac{T}{2}j\omega} = 1\cdot e^{j\left(\text{arctg}\frac{\omega T}{2} + \arctan\frac{\omega T}{2}\right)} =$

$= e^{\underbrace{j2\arctan\frac{\omega T}{2}}_{\text{va da } -\pi \text{ a } \pi}}$ è il cerchio unitario.



È la regola di discretizzazione più accurata

Metodo dell'invarianza ai segnali canonici



Voglio imporre che le due uscite siano esattamente uguali per $u(t)$ = segnale canonico (gradino, rampa, parabola).

Imponiamo $y^*(k) = y_d(k)$ e le trasformate $Z\{y^*(k)\} = Z\{y_d(k)\}$

$$Z\{y_d(k)\} = Z\{U(s)\} \cdot C_d(z)$$
$$Z\{y^*(k)\} = Z\{U(s) \cdot C(s)\}$$
$$\Rightarrow Z\{U(s) \cdot C(s)\} = Z\{U(s)\} \cdot C_d(z)$$

$$C_d(z) = \frac{Z\{U(s)\,C(s)\}}{Z\{U(s)\}}$$

Ora vediamo i casi particolari.

(1) GRADINO $u(t) = 1(t)$

$$U(s) = \frac{1}{s} \qquad C_d(z) = \frac{Z\left\{\frac{C(s)}{s}\right\}}{Z\left\{\frac{1}{s}\right\}} = \frac{Z\left\{\frac{C(s)}{s}\right\}}{\frac{z}{z-1}} = \frac{z-1}{z}\, Z\left\{\frac{C(s)}{s}\right\}.$$

(2) RAMPA $u(t) = t$

$$U(s) = \frac{1}{s^2} \qquad C_d(z) = \frac{Z\left\{\frac{C(s)}{s^2}\right\}}{Z\left\{\frac{1}{s^2}\right\}} = \frac{Z\left\{\frac{C(s)}{s^2}\right\}}{\frac{Tz}{(z-1)^2}} = \frac{(z-1)^2}{Tz}\, Z\left\{\frac{C(s)}{s^2}\right\}$$

(3) PARABOLA $u(t)=\frac{t^2}{2}$

$$U(s)=\frac{1}{s^3} \qquad Cd(z)=\frac{Z\left\{\frac{C(s)}{s^3}\right\}}{Z\left\{\frac{1}{s^3}\right\}}=\frac{Z\left\{\frac{C(s)}{s^3}\right\}}{\frac{T^2}{2}\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}}=\frac{2(z-1)^3}{T^2 z(z+1)}Z\left\{\frac{C(s)}{s^3}\right\}$$

Metodo corrispondenza poli-zeri

Supponiamo di avere un controllore generico:

$$C(s)=K\cdot\frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)}$$ effettuando la sostituzione $z=e^{sT}$

$$Cd(z)=K_d\frac{(z-e^{z_1T})(z-e^{z_2T})\dots(z-e^{z_mT})}{(z-e^{p_1T})(z-e^{p_2T})\dots(z-e^{p_nT})}$$

che ha zeri $=\left\{e^{z_1T},e^{z_2T},\dots,e^{z_mT}\right\}$ e poli $=\left\{e^{p_1T},e^{p_2T},\dots,e^{p_nT}\right\}$.

Il coefficiente K_d si trova:

- uguagliando il guadagno statico $Cd(1)=C(0)$ per sistemi di tipo 0
- uguagliando le C_v per sistemi di tipo 1 $\left(\lim_{s\to 0} s\cdot C(s)\right)$
- uguagliando le C_a per sistemi di tipo 2.

Esempio

$$C(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}$$ con poli $p=\{-1,-2\}$

I poli del sistema discreto saranno $p=\{e^{-T},e^{-2T}\}$

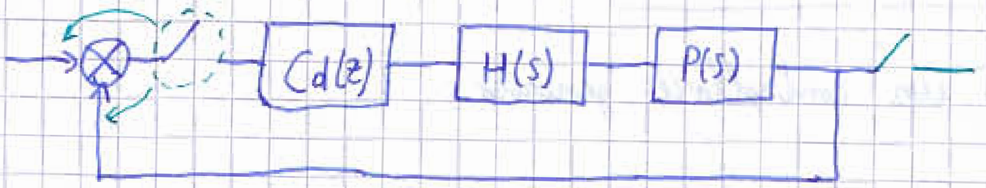
$$Cd(z)=\frac{K_d}{(z-e^{-T})(z-e^{-2T})}$$; essendo un sistema di tipo 0, trovo K_d da

$C(0)=Cd(1)$

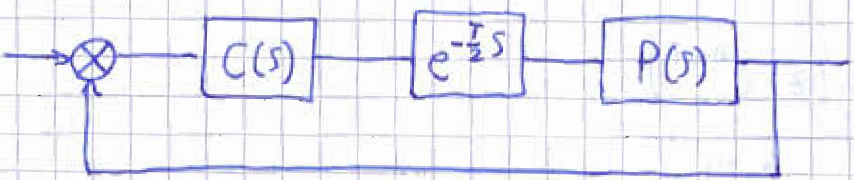
$$\frac{1}{2} = \frac{K_d}{(1-e^{-T})(1-e^{-2T})} \rightarrow K_d = \frac{(1-e^{-T})(1-e^{-2T})}{2}$$

Scelta del tempo di campionamento

Abbiamo detto che un sistema a tempo continuo:

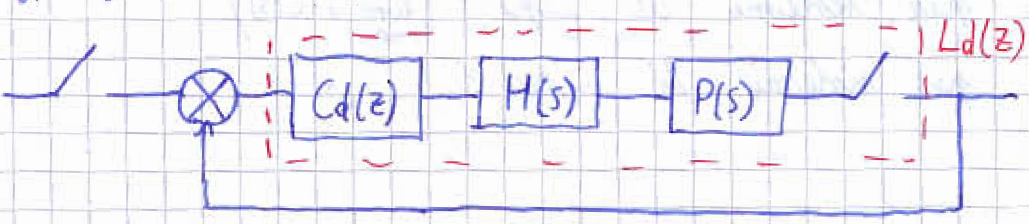


può essere approssimato a



Vediamo che questa approssimazione è valida solo se ho un tempo di campionamento piccolo. Calcolo, per dimostrarlo, i diagrammi di Nyquist dei due sistemi.

Aggiungo un campionatore e sposto a monte il primo campionatore.



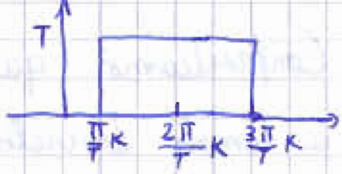
$$L_d(z) = C_d(z)\, \mathcal{Z}\{H(s)P(s)\}$$

$$L_d(e^{j\omega T}) = C_d(e^{j\omega T}) \cdot \mathcal{Z}\{H(s)P(s)\}\Big|_{z=e^{j\omega T}}$$

$$\mathcal{Z}\{H(s)P(s)\}\Big|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} H\left(j\omega - j\frac{2\pi}{T}k\right) P\left(j\omega - j\frac{2\pi}{T}k\right)$$

Faccio un'approssimazione: trascuro l'effetto del failing del filtro di hold

$$H(j\omega) \cong F_{id}(j\omega)\, e^{-j\omega \frac{T}{2}} \quad \text{con } F_{id}(j\omega) = \begin{cases} T & \text{se } |\omega| < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



$$Z\{H(s)P(s)\}\Big|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{F_{id}\left(j\omega - j\frac{2\pi}{T}k\right)}_{\text{treno di porte centrate in } \frac{2\pi}{T}k} e^{-j\left(\omega - \frac{2\pi}{T}k\right)\frac{T}{2}} P\left(j\omega - \frac{2\pi}{T}kj\right) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{T}} \cdot \cancel{T}\, e^{-j\omega\frac{T}{2}} P(j\omega)$$

Avendo assunto $\omega \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, del treno di porte si "salva" solo quella per $K=0$.

Vediamo ora quanto vale $C_d(e^{j\omega T})$. Usando la trasformata di Tustin, trovo

$$C_d(z) = C\left(\frac{2}{T}\,\frac{z-1}{z+1}\right) \quad \text{ponendo poi } z = e^{j\omega T}$$

$$C_d(e^{j\omega T}) = C\left(\frac{2}{T}\,\frac{e^{j\omega T}-1}{e^{j\omega T}+1}\right) = C\left(\frac{2}{T}\,\frac{\left(e^{j\omega\frac{T}{2}} - e^{-j\omega\frac{T}{2}}\right)/2j}{\left(e^{j\omega\frac{T}{2}} + e^{-j\omega\frac{T}{2}}\right)/2j}\right) =$$

$\cos\frac{\omega T}{2}$ $\quad$ $\operatorname{sen}\frac{\omega T}{2}$

$$= C\left(\frac{2}{T}\, j\, \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)}\right) = C\left(j\frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right) = C(j\,f(\omega))$$

Se $\frac{\omega T}{2} \ll 1$ posso approssimare la tangente con il suo argomento

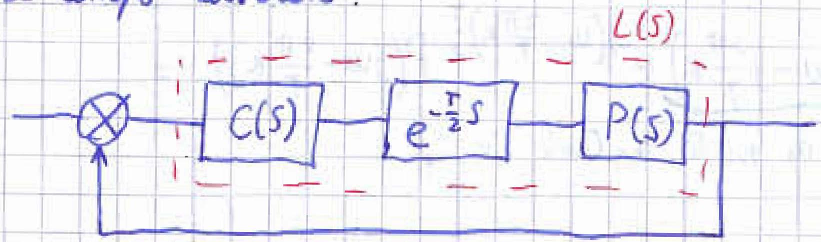
$$C_d(e^{j\omega T}) \cong C\left(j\,\frac{\cancel{2}}{\cancel{T}}\cdot\frac{\omega \cancel{T}}{\cancel{2}}\right) = C(j\omega)$$

Per fare un'approssimazione più corretta, devo considerare $|\omega| < \frac{\pi}{T \cdot 4}$ (costante)

Tornando a $L_d(e^{j\omega T}) = C_d(e^{j\omega T})\, Z\{H(s)P(s)\}\Big|_{z=e^{j\omega T}}$, usando questa approssimazione, posso dire

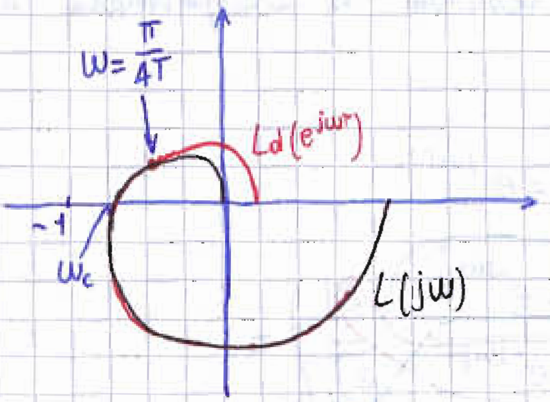
$$L_d(e^{j\omega T}) \underset{\text{se } |\omega| < \frac{\pi}{T\cdot 4}}{\cong} C(j\omega)\,P(j\omega)\,e^{-j\omega\frac{T}{2}}$$

Confrontiamo questo risultato con quello che otteniamo dal sistema a tempo discreto:



$L(j\omega) = L(s)|_{s=j\omega} = C(j\omega) \cdot e^{-\frac{j\omega T}{2}} \cdot P(j\omega)$ che è esattamente uguale al risultato precedente!

Concludendo, $L_d(e^{j\omega T}) \cong L(j\omega)$ se $|\omega| < \frac{\pi}{T \cdot 4}$



Il criterio per la scelta del tempo di campionamento è

$$\omega_c < \frac{\pi}{4 \cdot T} \quad \text{ovvero} \quad T < \frac{\pi}{4 \cdot \omega_c}.$$

dove ω_c è la pulsazione critica di attraversamento dell'asse reale negativo. Il tempo di campionamento è corretto se $T < \frac{\pi}{4\omega_c}$.

Un altro criterio per la scelta del tempo di un campionamento di un sistema

$$C(s) = K \cdot \frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)}$$

è usare la regola empirica che dice che:

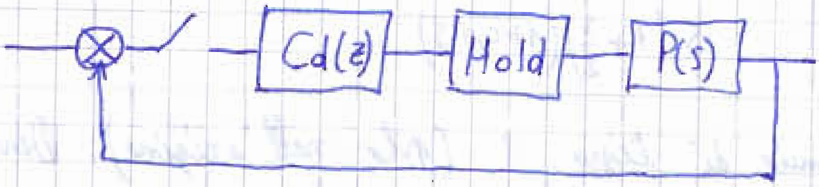
$W_c \cong \max\{|x|\}$ dove $x \in \{z_1, z_2, \dots, z_m, p_1, p_2, \dots, p_n\}$

e quindi, prendendo la stessa condizione di prima:

$T < \dfrac{\pi}{l \cdot 4}$ dove $l = \max\{|x|\}$ con $x \in \{z_1, z_2, \dots, z_m, p_1, p_2, \dots, p_n\}$

26/05/2010

Esercizio



Progettare il controllore $Cd(z)$ mediante rete anticipatrice $C(s) = K \cdot \dfrac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s}$ sapendo che $P(s) = \dfrac{1}{s(s+2)}$ e date le seguenti specifiche:

* errore a regime alla rampa $= \dfrac{1}{20}$
* $M_F = 30°$, $T = 0{,}02\ s$
* discretizzazione con Tustin

Considero il sistema

$$e^{-\frac{T}{2}s} = \frac{1}{e^{\frac{T}{2}s}} \underset{\text{Taylor}}{\cong} \frac{1}{1+\frac{T}{2}s} = \frac{2}{2+Ts} = \frac{1}{1+0{,}01s}$$

Il sistema è del primo ordine, quindi

$$e_\infty = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{20} \implies K_v = 20$$

Ma sappiamo che $K_v = \lim_{s\to 0} s \cdot K \underbrace{\frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}}_{C(s)} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+0{,}01s}}_{\text{Ritardo}} \cdot \underbrace{\frac{1}{s(s+2)}}_{P(s)} = \frac{K}{2}$

Da cui troviamo $K = 40$.

Per disegnare il diagramma di Nyquist, calcolo la funzione di trasferimento complessiva:

$$L_1(s) = 40 \cdot \frac{1}{1+0{,}01s} \cdot \frac{1}{s(s+2)} = 20 \cdot \frac{1}{s\left(1+\frac{s}{2}\right)\left(1+0{,}01s\right)}$$

È un sistema a tempo continuo di tipo 1 (polo nell'origine). Devo quindi trovare l'asintoto verticale:

$$\sigma = 20 \cdot \left(\sum \tau_z - \sum \tau_p\right) = 20\left(-\frac{1}{2} - 0{,}01\right) = -\frac{51}{5}$$

$$\lim_{\omega\to\infty} L_1(j\omega) = 0$$

$$\arg L_1(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\omega}{2} - \arctan\frac{\omega}{100}$$

$$\arg L_1(0) = -\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{\omega\to\infty} \arg L_1(j\omega) = -\frac{3}{2}\pi$$

Trovo ora le intersezioni con l'asse reale: ho due metodi

- impongo $\arg L_1(j\omega) = -\pi$
- metodo analitico: $L_1(s) - \eta = 0$ ha solo radici immaginarie.

$$\frac{20}{s\left(1+\frac{s}{2}\right)\left(1+\frac{s}{100}\right)} - \eta = 0 \qquad 20 - s\left(1+\frac{s}{2}\right)\left(1+\frac{s}{100}\right)\eta = 0$$

$$-s^3\frac{\eta}{200} - s^2\eta\frac{51}{100} - \eta s + 20 = 0 \qquad s^3\frac{\eta}{200} + s^2\eta\frac{51}{100} + \eta s - 20 = 0$$

Faccio la tabella di Routh e impongo l'ultima riga nulla:

$\frac{\eta}{200}$	η
$\frac{\eta\cdot 51}{100}$	-20
(*)	

$$(*) = \frac{\cancel{\eta}\cdot\frac{\eta\cdot 51}{100} - \frac{\cancel{\eta}}{200}\cdot(-20)}{\frac{\cancel{\eta}51}{200}} \overset{\text{impongo}}{=} 0$$

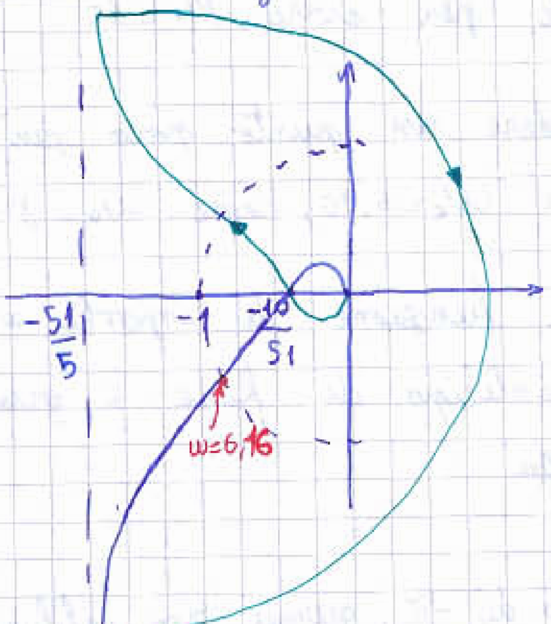
$$\frac{\eta 51}{100} + \frac{1}{10} = 0 \qquad \frac{\eta 51}{100} + \frac{1}{10} = 0 \qquad \eta = -\frac{10}{51}$$

Devo fare la verifica. Sostituisco il valore di η nella seconda riga della tabella di Routh e considero la riga come i coefficienti di un'equazione di secondo grado (equazione ausiliaria).

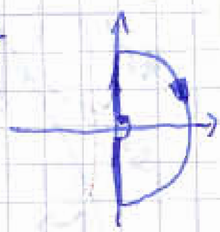
$$\eta\frac{51}{100}s^2 - 20 = 0 \qquad -\frac{\cancel{10}}{\cancel{51}}\cdot\frac{\cancel{51}}{\cancel{100}}s^2 - 20 = 0 \qquad -s^2 - 200 = 0 \qquad s = \pm 10\sqrt{2}\,j$$

OK

Posso ora disegnare il diagramma di Nyquist:



Il diagramma completo è percorso in senso orario perché il contorno di Nyquist circonda l'origine in senso antiorario



Trovo l'intersezione del diagramma di Nyquist con il cerchio unitario. Impongo $|L_1(j\omega)| = 1$

$$|L_1(j\omega)| = 1 \qquad \left| \frac{20}{j\omega\left(1+\frac{j\omega}{2}\right)\left(1+\frac{j\omega}{100}\right)} \right| = 1$$

$$\frac{20}{|\omega|\sqrt{1+\frac{\omega^2}{4}}\cdot\underbrace{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{(100)^2}}}_{\simeq 1}} = 1$$

che non so risolvere. Uso il metodo numerico, cioè faccio dei tentativi.

Altrimenti, posso trascurare questo termine e risolvere nel modo tradizionale:

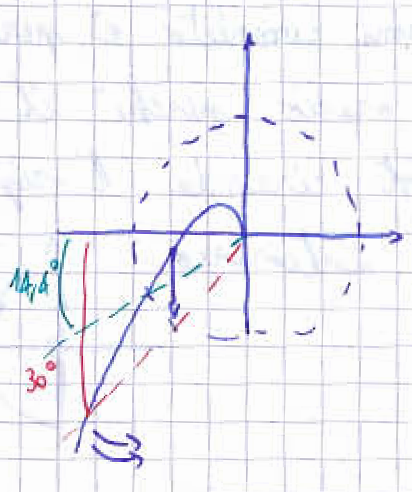
$$20 = |\omega|\sqrt{1+\frac{\omega^2}{4}} \qquad 400 = \omega^2\left(1+\frac{\omega^2}{4}\right) \qquad \omega^2 \simeq 38 \qquad \omega = \sqrt{38} = 6,16$$

Posso quindi calcolare il margine di fase:

$$L_1(6,16j) = \frac{20}{6,16j\left(1+\frac{6,16j}{2}\right)\left(1+\frac{6,16j}{100}\right)} = 0,9984 \cdot e^{-2,904j}$$

$$M_F = \pi - 2,904 = 14,4°$$

Devo quindi usare la rete anticipatrice per avere $M_F = 30°$



Devo prendere un punto poco più grande di $\omega_c = 6,16$, come $\omega_0 = 8$

Calcolo la funzione di risposta armonica e calcolo anticipo di fase e guadagno di ampiezza

$$L_1(j8) = 0,6044\, e^{-2,9764j}$$

la fase è > di $-\pi$, quindi non abbiamo ancora superato l'asse reale (OK)

voglio arrivare sul cerchio unitario

$$M = \frac{\text{Ampiezza Finale}}{\text{Ampiezza iniziale}} = \frac{1}{0,6044} = 1,654$$

φ = Fase finale − Fase iniziale $= (-\pi + 30°) + 2,9761 = -\pi - \frac{\pi}{6} + 2,9761 = 0,3585$

Verifico che $M\cos\varphi > 1$, $1,4947 > 1$ ok

A questo punto, applico le formule:

$$\tau = \frac{M - \cos\varphi}{\omega_0 \operatorname{sen}\varphi} = 0,2559 \qquad \alpha = \frac{M\cos\varphi - 1}{M(M - \cos\varphi)} = 0,4624$$

$$C(s) = 40 \cdot \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha\tau s} = 40 \cdot \frac{1 + 0,2559 s}{1 + 0,1183 s}$$ che è il controllore a tempo continuo cercato.

Per passare a tempo discreto, devo verificare che il tempo di campionamento scelto sia corretto. In particolare:

1) $T < \frac{\pi}{4 \ell}$ dove $\ell = \max\{|x|\}$ con $x \in$ poli, zeri di $C(s)$

condizione approssimata

$$\text{zero} = \frac{-1}{0,2559} = -3,9 \qquad \text{polo} = -\frac{1}{0,1183} = -8,45$$

Quindi voglio che $T < \frac{\pi}{4 \cdot 8,45}$, cioè $\underset{0,02}{T} < 0,0929$ vero

2) $T < \frac{\pi}{4 \cdot \omega_c}$ devo trovare la nuova intersezione con l'asse reale del diagramma di Nyquist della rete comprensiva della rete anticipatrice: $C(s) \cdot P(s) \cdot$ ritardo

condizione precisa

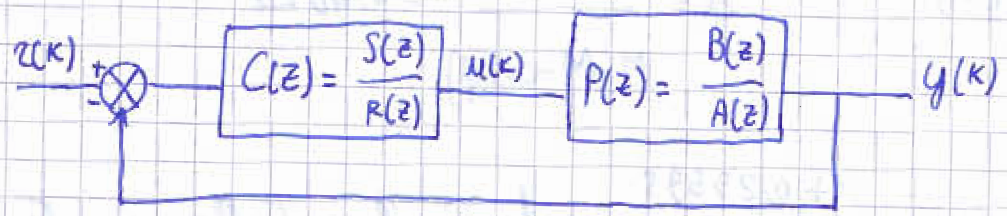
Troverei $\omega_c = 25,3$, quindi $T < \frac{\pi}{4 \cdot 25,3} = 0,031$ vero

Infine, devo trovare l'espressione del controllore a tempo discreto. Uso la trasformata di Tustin:

$$s \longrightarrow \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1} \quad \rightsquigarrow C_d(z) = \frac{41{,}44z - 38{,}32}{z - 0{,}8441}.$$

PROGETTO ANALITICO

Considero un sistema:



La funzione di trasferimento sarà:

$$T_r^y(z) = \frac{\frac{S}{R} \cdot \frac{B}{A}}{1 + \frac{S}{R} \cdot \frac{B}{A}} = \frac{SB}{RA + SB} \quad \text{che ha poli} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$$

Solitamente, i poli vengono scritti come $Q(z) = (z-p_1)(z-p_2)\dots(z-p_n)$

Il controllore si progetta risolvendo l'EQUAZIONE DIOFANTEA:

$$\underbrace{\boxed{R(z)}}_{\text{incognita}} \cdot \underbrace{\boxed{A(z)}}_{\text{assegnato}} + \underbrace{\boxed{S(z)}}_{\text{incognita}} \underbrace{\boxed{B(z)}}_{\text{assegnato}} = \underbrace{\boxed{Q(z)}}_{\text{assegnato}}$$

Proprietà

L'equazione diofantea $R(z)A(z) + S(z)B(z) = Q(z)$ in cui A, B, Q sono poli assegnati e A e B sono coprimi (non hanno poli che sono anche zeri, sempre vero) ammette sempre soluzione nei polinomi incogniti R ed S.

Per prima cosa devo trovare il grado di R e S. Imponiamo
equazioni = # incognite.

equazioni $= n + 1$ con n grado dell'equazione

Vediamo come calcolarlo.

$gr\,R \geq gr\,S$ perchè il controllore deve essere proprio
$gr\,A \geq gr\,B$ perchè il sistema è proprio
$\Rightarrow gr\,AR \geq gr\,BS$ perchè $gr\,A + gr\,R \geq gr\,B + gr\,S$

Il primo termine determina quindi il numero di equazioni da soddisfare:

$\#equazioni = gr\,R + gr\,A + 1$

Calcolo ora # incognite, ovvero i gradi di libertà. I polinomi incogniti sono R e S e pertanto il numero di variabili da imporre saranno:

$\#incognite = gr\,R + 1 + gr\,S + 1$

Sostituendo nell'equazione:

$gr\,R + 1 + gr\,S \cancel{+1} = gr\,R + gr\,A \cancel{+1} \rightarrow gr\,S = gr\,A - 1$

Per trovare $gr\,R$ devo solo rispettare il vincolo

$gr\,R \geq gr\,S \rightarrow gr\,R \geq gr\,A - 1$ posso quindi scegliere $gr\,R = gr\,A - 1$

Esempio

Voglio controllare un sistema $P(z) = \dfrac{z-0,2}{(z+0,2)(z+2)}$ tramite un controllore in modo che i poli siano:

poli $= \{0; 0,1; 0,2\}$.

$A(z) = (z+0,2)(z+2)$

$R(z) = ?$

$B(z) = z - 0,2$

$S(z) = ?$

$Q(z) = z(z-0,1)(z-0,2)$

Impongo $RA + SB = Q$, cioè $R(z+0,2)(z+2) + S(z-0,2) = Q(z)$

Impongo # equazioni = # incognite:

$$\left.\begin{aligned} \#\text{equazioni} &= gr\,R + 2 + 1 \\ \#\text{incognite} &= gr\,R + 1 + gr\,S + 1 \end{aligned}\right\} \rightarrow gr\,R + 3 = gr\,R + 2 + gr\,S \rightarrow gr\,S = 1$$

$gr\,R = gr\,S = 1$ (per esempio)

$S = s_1 z + s_0$
$R = r_1 z + r_0$

Sostituisco nell'equazione diofantea:

$$(r_1 z + r_0)(z + 0{,}2)(z + 2) + (s_1 z + s_0)(z - 0{,}2) = z(z - 0{,}1)(z - 0{,}2)$$

Faccio i calcoli e raccolgo le potenze di z:

$$z^3 \cdot r_1 + z^2(2{,}2 r_1 + r_0 + s_1) + z(2{,}2 r_0 + 0{,}4 r_1 + s_0 - 0{,}2 s_1) + 0{,}4 r_0 - 0{,}2 s_0 = z^3 - 0{,}3 z^2 + 0{,}02$$

$$\begin{cases} r_1 = 1 \\ 2{,}2 r_1 + r_0 + s_1 = -0{,}3 \\ 2{,}2 r_0 + 0{,}4 r_1 + s_0 - 0{,}2 s_1 = 0{,}02 \\ 0{,}4 r_0 - 0{,}2 s_0 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} r_0 = -0{,}2 \\ r_1 = 1 \\ s_0 = -0{,}4 \\ s_1 = -2{,}3 \end{cases}$$

Posso quindi scrivere il controllore

$$C(z) = \frac{-2{,}3 z - 0{,}4}{z - 0{,}2}$$

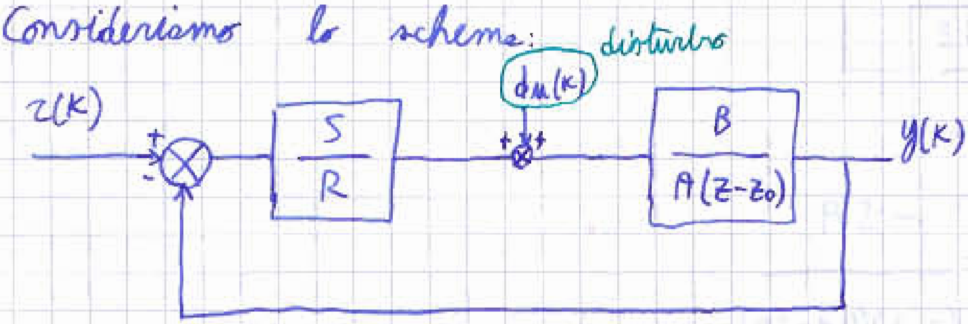
Un limite di questo metodo sono i tanti conti da fare!

27/05/10

METODO CANCELLAZIONE POLI - ZERI

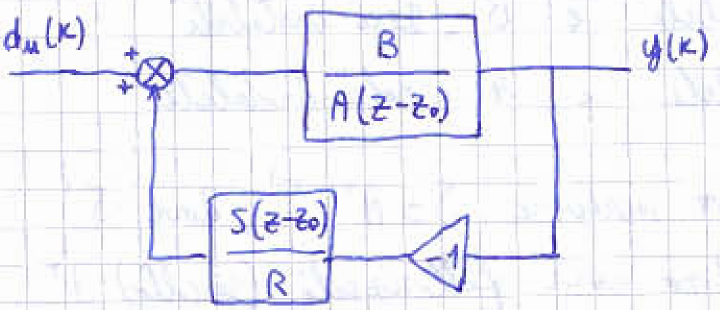
È una semplificazione del progetto analitico. Possiamo cancellare solo poli o zeri stabili.

Consideriamo lo schema:



$$T_r^y(z) = \frac{\frac{S}{R}\cancel{(z-z_0)} \cdot \frac{B}{A\cancel{(z-z_0)}}}{1 + \frac{S}{R}\cancel{(z-z_0)} \cdot \frac{B}{A\cancel{(z-z_0)}}} = \frac{SB}{RA+SB}$$

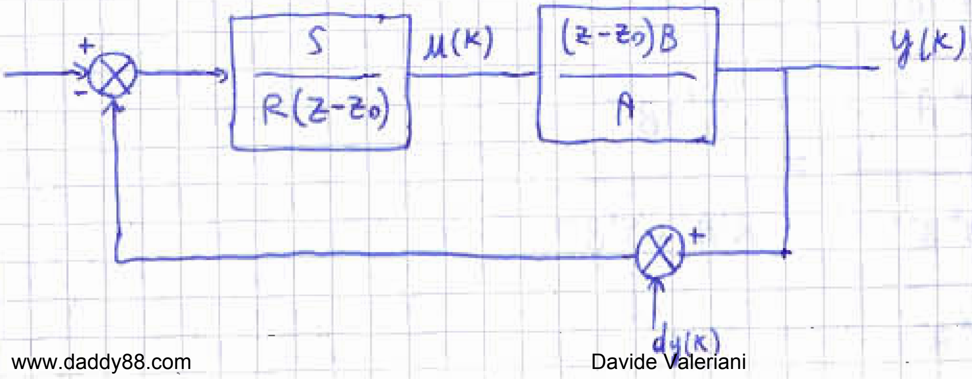
Tuttavia, il polo rimane se calcolo la funzione di trasferimento tra disturbo e uscita:



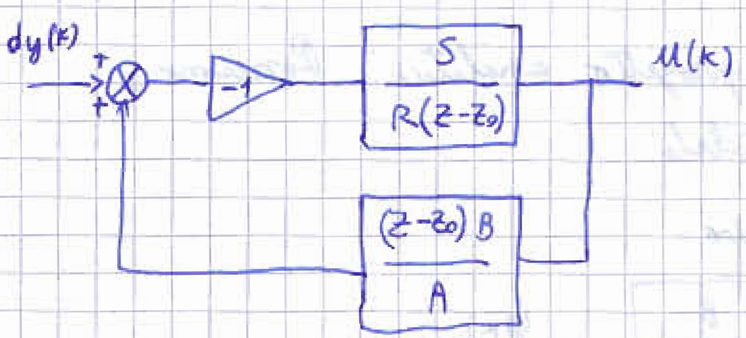
$$T_{d_u}^y(z) = \frac{\frac{B}{A(z-z_0)}}{1 + \frac{B}{A\cancel{(z-z_0)}} \cdot \frac{S\cancel{(z-z_0)}}{R}}$$

Quindi ho visto che non riesco a cancellare un polo instabile.

Vediamo ora che non possiamo cancellare uno zero instabile.

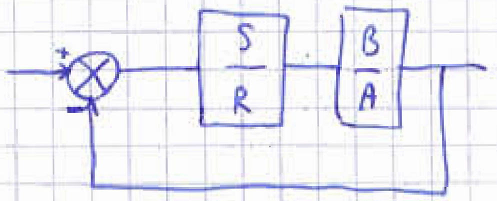


Calcoliamo funzione di trasferimento tra dy e l'uscita:



$$T_{dy}^{u}(z)=\frac{\frac{-S}{R(z-z_0)}}{1+\frac{S}{R\cancel{(z-z_0)}}\cdot\frac{\cancel{(z-z_0)}B}{A}}=\frac{-SA}{(z-z_0)(RA+SB)}.$$

Applichiamo ora questo metodo al progetto analitico:



Separiamo i poli stabili da quelli instabili

$B=B^{+}\cdot B^{-}$ con B^{+} = zeri stabili e B^{-} = zeri instabili

$A=A^{+}\cdot A^{-}$ con A^{+} = poli stabili e A^{-} = poli instabili

Per cancellare i poli stabili devo scrivere $S=A^{+}\cdot S'$, dove S' è la parte che mi rimane dopo aver fattorizzato (raccolto) A^{+}.

Per cancellare gli zeri stabili, scrivo $R=B^{+}\cdot R'$.

La funzione di trasferimento sarà:

$$T_{r}^{y}(z)=\frac{\frac{\cancel{A^{+}}\cdot S'}{\cancel{B^{+}}\cdot R'}\cdot\frac{\cancel{B^{+}}B^{-}}{\cancel{A^{+}}A^{-}}}{1+\frac{\cancel{A^{+}}\cdot S'}{\cancel{B^{+}}\cdot R'}\cdot\frac{\cancel{B^{+}}B^{-}}{\cancel{A^{+}}A^{-}}}=\frac{S'B^{-}}{R'A^{-}+S'B^{-}}$$

Faccio un'altra aggiunta: aggiungo dei poli in 1 nel controllore per decidere e governare il tipo del sistema e, quindi, l'errore a regime. Nel caso venga chiesto di avere errore nullo al gradino, dovrei avere un polo in 1 tra impianto e controllore.

Scrivo $R' = (z-1)^q R''$ e quindi $R = B^+(z-1)^q R''$ dove q mi indica il tipo di sistema voluto.
Devo aggiungere i poli in 1 che mi mancano tra impianto e controllore per soddisfare le specifiche.
La funzione di trasferimento diventa:

$$T_r^y(z) = \frac{S'B^-}{R''(z-1)^q A^- + S'B^-}$$

Risolvo l'equazione diofantea: $R''(z-1)^q A^- + S'B^- = Q(z)$
$\#$ equazione = $\#$ incognite
$\#$ equazioni $= gr\left(R''(z-1)^q A^-\right) + 1 = gr R'' + q + gr A^- + 1$
$\#$ incognite $= gr R'' + 1 + gr S' + 1 \rightarrow$ le incognite sono i parametri di R'' e S'

$$\cancel{grR''} + q + grA^- \cancel{+1} = \cancel{grR''} \cancel{+1} + grS' + 1 \rightarrow \boxed{grS' = grA^- + q - 1}$$

Per trovare grR'' devo imporre il grado relativo del controllore uguale a 0, ovvero $grR = grS$. Devo tenere conto della fattorizzazione.

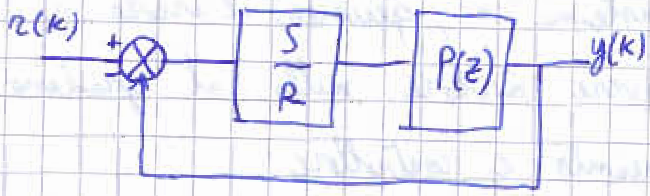
$$\left.\begin{aligned} grR &= grB^+ + q + grR'' \\ grS &= grA^+ + grS' \end{aligned}\right] \Rightarrow grR = grS \quad \text{da cui ricavo } grR''$$

$$\boxed{grR''} = grA^+ + grS' - grB^+ - q = grA^+ + grA^- \cancel{+q} - 1 - grB^+ \cancel{-q} =$$

$$= \boxed{grA - grB^+ - 1}$$

Vediamo un esercizio già fatto e applichiamo la cancellazione.

Esercizio



$$P(z) = \frac{z-0{,}2}{(z+0{,}2)(z+2)}$$

$$poli = \{0, 1\}$$

Il polo che posso cancellare perchè stabile è $(z+0{,}2)$ mentre lo zero da cancellare è $(z-0{,}2)$

$B = z - 0{,}2$ $\quad B^+ = z - 0{,}2$ $\quad B^- = \underline{1}$ non 0 $\quad$ se avessi avuto $z(z-0{,}2)$, il z potevo metterlo dove volevo

$A = (z+0{,}2)(z+2)$ $\quad A^+ = z+0{,}2$ $\quad A^- = z+2$

$S = A^+ \cdot S' = (z+0{,}2)\cdot S'$ $\qquad R = B^+ \cdot R' = (z-0{,}2)\cdot R'$

Calcolo la funzione di trasferimento del sistema:

$$T_r^y(z) = \frac{\frac{S'A^+}{R'B^+}\,\frac{B^+B^-}{A^+A^-}}{1 + \frac{S'A^+}{R'B^+}\cdot\frac{B^+B^-}{A^+A^-}} = \frac{S'B^-}{A^-R' + S'B^-}$$

Ora devo imporre che i poli siano quelli voluti attraverso l'equazione diofantea:

$$A^-R' + S'B^- = Q(z) \quad \rightarrow \quad (z+2)R' + S' = Q(z)$$

Cerco il grado di R' e S'

$\#equazioni = gr\left((z+2)R'\right) + 1 = 1 + gr R' + 1$

$\#incognite = gr R' + 1 + gr S' + 1$

$\rightarrow \#eq = \#inc \rightarrow gr S' = 0$

Impongo $gr R = gr S \rightarrow gr R' + 1 = gr S' + 1 \rightarrow gr R' = gr S' = 0$

$S = s_0 \qquad R = r_0$

L'equazione diofantea sarà:

$$(z+2)r_0 + s_0 = z - 0{,}1$$ perché $Q(z)$ deve essere dello stesso grado del primo membro

$$r_0 z + 2r_0 + s_0 = z - 0{,}1 \qquad \begin{cases} r_0 = 1 \\ 2r_0 + s_0 = -0{,}1 \end{cases} \qquad \begin{cases} r_0 = 1 \\ s_0 = -2{,}1 \end{cases}$$

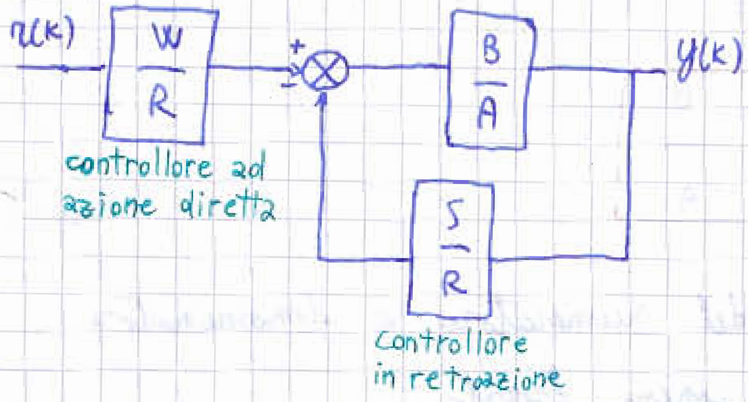
Ricostruiamo il controllore:

$$R = (z-0{,}2)R' = (z-0{,}2) \qquad S = (z+0{,}2)S' = -2{,}1(z+0{,}2)$$

$$C(z) = \frac{-2{,}1(z+0{,}2)}{(z-0{,}2)}$$

PROGETTO A DUE GRADI DI LIBERTÀ

In questo tipo di progetto ho due controllori:



Permette di imporre la funzione di trasferimento completa, numeratore e denominatore.

$$T_r^y(z) = \frac{\frac{W}{R} \cdot \frac{B}{A}}{1 + \frac{B}{A} \cdot \frac{S}{R}}$$

Fattorizziamo:

$A = A^+ A^-$
$B = B^+ B^-$
$R = B^+ R'$
$S = A^+ S'$
$W = A^+ \cdot W'$

$$T_r^y(z) = \frac{\frac{\cancel{A^+} W'}{\cancel{B^+} R'} \cdot \frac{\cancel{B^+} B^-}{\cancel{A^+} A^-}}{1 + \frac{\cancel{B^+} B^-}{\cancel{A^+} A^-} \frac{\cancel{A^+} S'}{\cancel{B^+} R'}} = \frac{W' B^-}{A^- R' + B^- S'} = \frac{N_d}{D_d} \cdot \frac{A_0}{A_0}$$

A_0 è un polinomio con radici nel cerchio unitario (stabili).

$$\begin{cases} W' B^- = N_d \cdot A_0 \\ A^- R' + B^- S' = D_d \cdot A_0 \end{cases}$$

1) $N_d = N_d' \cdot B^-$ la funzione di trasferimento desiderata deve contenere gli zeri instabili del sistema

2) Il grado relativo è $\rho = gr A^- + gr R' - gr W' - gr B^-$.

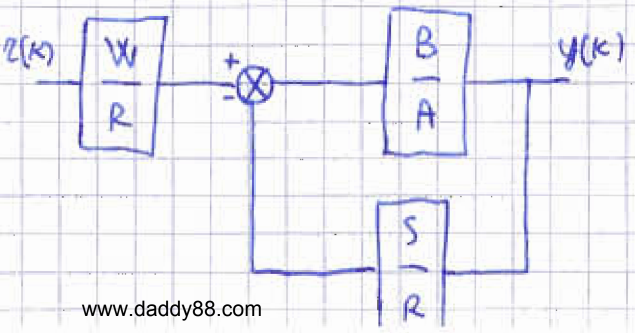
$$\rho = gr A - \cancel{gr A^+} + gr R - \cancel{gr B^+} - (gr W - \cancel{gr A^+}) - (gr B - \cancel{gr B^+}) =$$
$$= \underbrace{gr A - gr B}_{\text{grado relativo del sistema}} + \underbrace{gr R - gr W}_{\text{grado relativo del controllore ad azione diretta}}$$

Pertanto, $\boxed{\rho \geq \text{grado relativo di } \frac{B}{A}}$

A_0 serve per adattare il grado del numeratore e denominatore desiderato al grado del polinomio appena trovato.

Esercizio

Dato un sistema



con $P(z) = \frac{B}{A} = \frac{z - 0{,}2}{(z-1)(z+0{,}2)}$

Trovare R, S, W in modo che la funzione di trasferimento complessiva sia $\frac{1}{z}$, ovvero abbia un polo in 0.

$$A = (z-1)(z+0{,}2) = A^+A^- \quad A^+ = z+0{,}2 \quad A^- = z-1$$

$$B = (z-0{,}2) = B^+B^- \quad B^+ = z-0{,}2 \quad B^- = 1$$

$$R = B^+R' = (z-0{,}2)\,R'$$

$$S = A^+S' = (z+0{,}2)\,S'$$

$$W = A^+ \cdot W' = (z+0{,}2)\,W'$$

$$T_r^y(z) = \frac{W'B^-}{A^-R'+B^-S'} = \frac{W'}{(z-1)R'+S'} \overset{\text{impongo}}{=} \frac{N_d}{D_d} \cdot \frac{A_0}{A_0} = \frac{A_0}{z(A_0)}$$

$$\begin{cases} W' = A_0 \\ (z-1)R' + S' = A_0 z \end{cases}$$

$$\#\text{equazioni} = gr\left((z-1)R'\right) + 1 = 1 + grR' + 1$$

$$\#\text{incognite} = gr\,R' + 1 + grS' + 1$$

$$= \;\rightarrow\; grS' = 0 \qquad S' = s_0$$

$$grR = grS \;\rightarrow\; 1 + grR' = 1 + grS' \;\rightarrow\; grR' = grS' = 0 \qquad R' = r_0$$

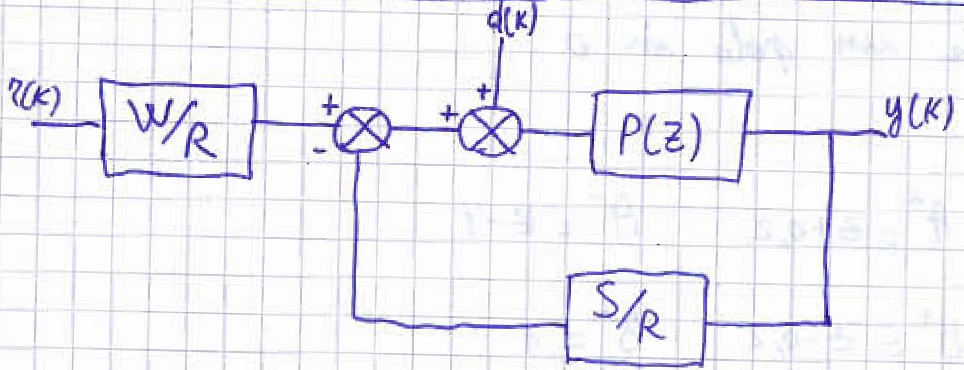
$$\begin{cases} W' = A_0 \\ (z-1)r_0 + s_0 = A_0 z \end{cases} \quad \begin{cases} W' = A_0 \\ r_0 = A_0 \\ s_0 - r_0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} W' = A_0 \\ r_0 = A_0 \\ s_0 = A_0 \end{cases} \quad \begin{cases} r_0 = 1 \\ s_0 = 1 \\ W' = 1 \end{cases}$$

Posso prendere $A_0 = 1$ perché non mi serve alzare il grado

$$W = (z+0{,}2) \cdot W' = z+0{,}2 \qquad S = (z+0{,}2)\,S' = z+0{,}2 \qquad R = (z-0{,}2)\,R' = z-0{,}2$$

PROGETTO A DUE GRADI DI LIBERTÀ CON DISTURBO

31/05/2010



Progettare un controllore (trovare S, R, W) che controlli l'impianto

$$P(z) = \frac{z-0{,}2}{z(z-0{,}1)}$$ sapendo che il disturbo $d(k) = \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)$

che soddisfi le specifiche:

1) $T_r^y = \dfrac{1}{z}$ 2) $d(k)$ non ha effetto sull'uscita asintoticamente

Calcolo la funzione di trasferimento tra $d(k)$ e $y(k)$ annullando gli altri ingressi:

$$T_d^y(z) = \frac{\frac{B}{A}}{1-\left(-\frac{B}{A}\frac{S}{R}\right)} = \frac{BR}{AR+BS}$$

Trasformo $d(k)$

$$D(z) = \frac{z\sin\omega}{z^2-2z\cos\omega+1} \overset{\omega=\frac{\pi}{2}}{=} \frac{z}{z^2+1}$$

Calcolo l'uscita

$$T_d^y(z)\cdot D(z) = \frac{BR}{(AR+BS)}\cdot\frac{z}{z^2+1} = \frac{BR'(z^2+1)z}{(AR+BS)(z^2+1)}$$ Principio del modello interno

Per eliminare il disturbo ho bisogno che R sia fatto così:

$$R = R' \cdot (z^2+1)$$

Questa fattorizzazione mi permette di eliminare l'errore a regime.

Consideriamo ora la prima specifica:

$$T_r^y(z) = \frac{\frac{W}{R} \cdot \frac{B}{A}}{1 + \frac{S}{R} \cdot \frac{B}{A}}$$

Fattorizzo:

$$A = A^+ \cdot A^- \qquad A^+ = z(z-0{,}1) \qquad A^- = 1$$

$$B = B^+ \cdot B^- \qquad B^+ = z-0{,}2 \qquad B^- = 1$$

$$W = W' \cdot A^+ = W' z(z-0{,}1)$$

$$S = S' \cdot A^+ = S' z(z-0{,}1)$$

$$R = (z^2+1) \cdot R' = (z^2+1) \cdot B^+ \cdot R'' = (z^2+1) \cdot (z-0{,}2) \cdot R''$$

Sostituisco nella funzione di trasferimento:

$$T_r^y(z) = \frac{\frac{W' \cdot B^-}{R''(z^2+1) \cdot A^-}}{1 + \frac{S' \cdot B^-}{R''(z^2+1) A^-}} = \frac{W'}{R''(z^2+1) + S'} \underset{\text{impongo}}{=} \frac{1 \cdot A_0(z)}{z \cdot A_0(z)}$$

L'equazione diofantea diventa:

$$R''(z^2+1) + S' = z \cdot A_0(z)$$

$\#$equazioni $= gr\,R'' + 2 + 1$

$\#$incognite $= gr\,R'' + 1 + gr\,S' + 1$ $\rightarrow gr\,S' = 1 \rightarrow S' = s_1 z + s_0$

Impongo $gr\,R = gr\,S$ per trovare R''

$gr\,R = 3 + gr\,R''$

$gr\,S = 2 + gr\,S'$ $\rightarrow gr\,R'' = gr\,S' - 1 = 0 \rightarrow R'' = r_0$

Sostituisco nella diofantea:

$$r_0(z^2+1) + s_1 z + s_0 = z \cdot A_0$$

Scelgo $A_0(z) = z$ per adeguare il grado

$$z^2 \cdot r_0 + r_0 + s_1 z + s_0 = z^2 \rightarrow \begin{cases} r_0 = 1 \\ s_1 = 0 \\ r_0 + s_0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} r_0 = 1 \\ s_1 = 0 \\ s_0 = -1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} R'' = 1 \\ S' = -1 \end{array}$$

Rimane da trovare W'. Eguaglio i numeratori:

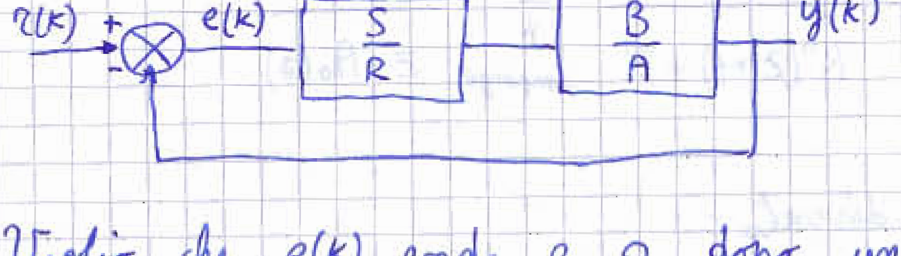
$$W' = 1 \cdot A_0(z) \rightarrow W' = z$$

Posso ora trovare R, S, W:

$$W = z^2(z-0{,}1) \qquad R = 1 \cdot (z^2+1)(z-0{,}2) \qquad S = -1 \cdot z(z-0{,}1)$$

PROGETTO DEADBEAT

Considero un sistema:



Voglio che $e(k)$ vada a 0 dopo un numero finito di passi. Questo lo posso fare solo in corrispondenza di ingressi canonici:

$$r(k) = 1(k) \qquad R(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$r(k) = k \qquad R(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$r(k) = \frac{k^2}{2} \qquad R(z) = \frac{z(z+1)}{2(z-1)^3}$$

Calcolo la funzione di trasferimento $T_r^e(z)$:

$$T_r^e(z) = \frac{1}{1+\frac{S}{R}\cdot\frac{B}{A}} = \frac{RA}{RA+SB}$$

Posso quindi trovare $E(z)$

$$E(z) = R(z)\cdot T_r^e(z) = \frac{F(z)}{(z-1)^l} \cdot \frac{RA}{RA+SB}$$

$$e(k) = e_0\,\delta(k) + e_1\,\delta(k-1) + \ldots + e_n\,\delta(k-n)$$

Se trasformo $e(k)$ diventa:

$$E(z) = e_0 + e_1 z^{-1} + \ldots + e_n z^{-n} = \frac{e_0 z^n + e_1 z^{n-1} + \ldots + e_n}{z^n}$$

Per eliminare $(z-1)^l$ un po' lo farà A, il resto devo farlo io con il controllore R.

$$A = A^+ A^- \rightarrow A^- = (z-1)^p \cdot A' \qquad E(z) = \frac{G(z)}{z^n}$$

$$B = B^+ B^-$$

$$S = A^+ S' \qquad R = B^+ R'$$

Sostituisco nell'equazione di partenza:

$$E(z) = \frac{F(z)}{(z-1)^l} \cdot \frac{R'A^-}{R'A^- + S'B^-} = \frac{F(z)}{(z-1)^l} \frac{R'A'(z-1)^p}{R'A'(z-1)^p + S'B^-}$$

Fattorizzo ora il controllore R per eliminare $(z-1)^l$:

$R' = R''(z-1)^q$ con $q+p=l$ e ottengo

$$E(z) = \frac{F(z)}{\cancel{(z-1)^l}} \cdot \frac{R''A'\cancel{(z-1)^{p+q}}}{R''A'(z-1)^{p+q} + S'B^-} = \frac{F(z) \cdot R''A'}{R''A'(z-1)^{p+q} + S'B^-}.$$

Infine impongo l'ultima condizione del progetto deadbeat:

$$R''A'(z-1)^{p+q} + S'B^- = z^n$$

Esercizio

Dato un sistema $P(z) = \dfrac{z-0,2}{(z+0,3)(z-1)}$ risolvere il progetto deadbeat alla rampa.

$$R(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$$

La funzione di trasferimento è $T_2^e(z) = \dfrac{1}{1+\frac{S}{R}\cdot\frac{B}{A}}$

$B = B^+ \cdot B^-$ $\quad B^+ = z-0,2 \quad B^- = 1$

$A = A^+ \cdot A^-$ $\quad A^+ = z+0,3 \quad A^- = z-1$

$R = B^+ R' = (z-0,2)R'$

$S = A^+ S' = (z+0,3)S'$

$$T_2^e(z) = \frac{1}{1 + \frac{S'\cancel{A^+}}{R'A^+} \cdot \frac{\cancel{B^+}B^-}{A^+A^-}} = \frac{R'A^-}{R'A^- + S'B^-}$$

Calcolo $E(z)$:

$$E(z) = R(z) \cdot T_2^e(z) = \frac{z}{(z-1)^2} \cdot \frac{R' A^-}{R'A^- + S'B^-} = \frac{z}{\cancel{(z-1)}^2} \cdot \frac{R''\cancel{(z-1)}\cancel{(z-1)}}{R''(z-1)^2 + S'}$$

con $R' = R''(z-1)$ perchè ho già un $(z-1)$ in A^-.

Risolvo quindi l'equazione diofantea:

$$R''(z-1)^2 + S' = z^n \qquad \#\text{equazioni} = \text{gr}\, R'' + 2 + 1$$
$$\#\text{incognite} = \text{gr}\, R'' + 1 + \text{gr}\, S' + 1$$

$$\#\text{equazioni} = \#\text{incognite} \rightarrow \text{gr}\, S' = 1 \rightarrow S' = s_1 z + s_0$$

Impongo ora $\text{gr}\, R = \text{gr}\, S$

$$\left.\begin{array}{l} \text{gr}\, R = 1 + 1 + \text{gr}\, R'' \\ \text{gr}\, S = 1 + \text{gr}\, S' \end{array}\right] \rightarrow \text{gr}\, R'' = \text{gr}\, S' - 1 = 0 \rightarrow R'' = r_0$$

Sostituisco nella diofantea:

$$r_0(z-1)^2 + s_1 z + s_0 = z^2$$

$$r_0 z^2 + (-2r_0 + s_1) z + r_0 + s_0 = z^2 \qquad \begin{cases} r_0 = 1 \\ -2r_0 + s_1 = 0 \\ r_0 + s_0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} r_0 = 1 \\ s_1 = 2 \\ s_0 = -1 \end{cases}$$

$$R = (z-0{,}2)(z-1) \cdot 1$$

$$S = (z+0{,}3)(2z-1)$$

L'errore diventa $E(z) = \dfrac{z \cdot 1}{z^2} = \dfrac{1}{z} \qquad e(k) = \delta(k-1)$